Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Probeklausur
3. Dezember 2009
WS09/10

Probeklausur Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm

In der Probeklausur sind **96** Punkte zu erzielen.
Bitte für jede Aufgabe eine neues Blatt beginnen. Auf jedem Blatt sollte der eigene Name und der Name des Tutors stehen.

Name, Vorname:

Name des Tutors:

Aufgabe	bearbeitet	max. Punkte	Punkte	Zeichen
1		38		
2		19		
3		9		
4		15		
5		10		
6		11		
gesamt		100		

Viel Erfolg!

Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Probeklausur
3. Dezember 2009
WS09/10

Probeklausur Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm

1. Grundlagen (6+3+5+9+4+4+4+3)= 38 Punkte

   a) Wie lauten die Maxwellgleichungen der Elektrodynamik und was ist ihre physikalische Interpretation? Wie lautet die Kontinuitätsgleichung? Leite sie aus den Maxwellgleichungen her.

   b) Wie lautet die Bestimmungsgleichung für ein elektrisches Potential Φ in der Elektrostatik? Wie lässt sich die Lösung mit Hilfe der Greensfunktion schreiben? Welche Randbedingungen können auftreten?

   c) Wie lautet die Ladungsdichte ρ einer homogenen, kugelsymmetrischen Ladungsverteilung? Bestimme das elektrische Feld $\vec{E}$ innerhalb und außerhalb der Kugel.

   d) Wie lautet der Zusammenhang zwischen den Feldern $\vec{E}$ und $\vec{B}$ und ihren Potentialen Φ und $\vec{A}$ in der Elektrodynamik? Was sind allgemein Eichtransformationen? Zeige mit Hilfe der Maxwellgleichungen, dass die Potentiale jeweils der inhomogenen Wellengleichung genügen.

   e) Wie lässt sich aus der Elektrodynamik das Coulombgesetz der Elektrostatik herleiten. Welche Eichung ist hierbei zu wählen? Wie sieht die Bestimmungsgleichung für $\vec{A}$ aus?

   f) Leite das Biot-Savart Gesetz aus den Maxwellgleichungen her.

   g) Zeige, dass die Energie W eines statischen elektrischen Feldes $\vec{E}$ gegeben ist durch

   $$W = \frac{1}{8\pi} \int |E(\vec{x})|^2 d^3x \tag{1}$$

   h) Wie sind die Multipolmomente im Fernfeld definiert? Welche Multipolmomente tragen bei einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung bei, welche bei einer zylindersymmetrischen?

2. Punktladung außerhalb einer Metallkugel (4+2+2+5+2+2+2)=19 Punkte
   Eine Punktladung Q sei am Ort $\vec{r}_Q = (0, 0, a)$ ausserhalb einer geerdeten Metallkugel mit Radius R um den Ursprung, auf der das elektrostatische Potential $\Phi = 0$ sein soll.

   a) Zeige, dass

   $$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} - \frac{R}{a} \frac{Q}{|\vec{r} - \frac{R^2}{a^2}\vec{r}_Q|} \tag{2}$$

   die Poissongleichung im Aussenraum erfüllt sowie für $\vec{r}$ auf der Kugel $\Phi = 0$ ist.

   b) Wie sieht das Potential innerhalb der Kugel aus? Wie kann man das Zustandekommen des Potentials anschaulich interpretieren?

   c) Schreibe Φ in Kugelkoordinaten. Kann Φ vom Winkel φ abhängen?

   d) Zeige für die Oberflächenladungsverteilung $\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial r}|_{r=R}$ und berechne sie.

   e) Welche Kraft erfährt Q? Was passiert für eine isolierte, d.h. nicht geerdete Kugel?

   f) Wie lautet Φ, wenn sich die Ladung innerhalb der Kugel befindet?

3. Azimutalsymmetrie der Ladungsverteilungen (4+5)=9 Punkte

Bei einer um die z-Achse rotationssymmetrischen Ladungsverteilung kann das Potential wie folgt nach Legendre-Polynomen entwickelt werden

$$\Phi(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}(A_l r^l + B_l r^{-l-1})P_l(\cos\vartheta). \tag{3}$$

a) Zeige: ist das Potential bei einem um die z-Achse rotationssymmetrischen Problem auf der z-Achse bekannt ($\Phi(r=z) = \Phi(r,0)$), so ist auch $\Phi(r,\vartheta)$ bekannt.

b) In der xy-Ebene befindet sich ein Ring mit Radius R und Mittelpunkt auf der z-Achse, der eine Ladung Q trägt. Bestimmt zuerst $\Phi(r=z)$ und dann $\Phi(r,\vartheta)$. Warum treten nur die P_l mit geraden l auf?

4. Ladungsverteilung ohne Azimutalsymmetrie (5+5+5)=15 Punkte

a) Wie lässt sich $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ in Legendrepolynome ausdrücken und begründe weiterhin

$$P_l(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{4}$$

(α ist der Winkel zwischen den Einheitsvektoren $\vec{e}_r$,$\vec{e}'_r$, d. h. es gilt $\cos(\alpha) = \cos(\theta)\cos(\theta')+ \sin(\theta)\sin(\theta')\cos(\phi-\phi')$), dass das durch eine beliebige Ladungsverteilung ρ am Ort $\vec{x}$ erzeugte Potential gegeben ist durch:

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi)\int_0^{\infty} r'^2 dr' \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\int\int d\Omega' Y^*_{lm}(\theta',\phi')\rho(\vec{x}'). \tag{5}$$

b) Folgere daraus, dass für das Fernfeld einer Ladungsverteilung (d.h. wenn $r > r'$ bleibt) sich das Potential als

$$\Phi(\vec{x})|_{\text{aussen}} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi)\frac{Q_{lm}}{r^{l+1}} \tag{6}$$

schreiben lässt, wobei die $Q_{lm} = \int_0^r r'^2 dr' r'^l \int\int d\Omega' Y^*_{lm}(\theta',\phi')\rho(\vec{r}')$ als Multipolmomente bezeichnet werden.

c) Diskutiere das Nahfeld, d.h. $r < r'$. Wie lauten die Multipolmomente.

5. Ladungswolke außerhalb einer Metallkugel (2+8)=10 Punkte

Eine Ladungsverteilung verschwinde nur für $r < |\vec{x}| < R$ nicht und befinde sich außerhalb einer leitenden, geerdeten Kugelfläche mit Radius $\tilde{R} < r$.

a) Formuliere die zugehörige Randbedinung. Gib das Potential Φ für $|\vec{x}| < \tilde{R}$ an.

b) Berechne Φ für $|\vec{x}| > \tilde{R}$. Entwickle dazu Φ nach geeigneten Momenten.

6. Magnetisches Feld eines Kreisleiters (5+6)=11 Punkte

a) Berechne das magnetische Moment eines vom Strom I durchflossenen Kreisleiters mit Radius R.

b) Berechne mit dem Biot-Savart Gesetz das Magnetfeld auf der Symmetrieachse des Kreisleiters und vergleiche das Ergebnis mit dem Dipolfeld, welches sich aus (a) ergibt.