Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Klausur
18. Februar 2010
WS09/10

Klausur Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm

1. Grundlagen (2+2+2+2+2+2+2+2+7+3)= 26 Punkte

a) Wie lauten die Maxwellgleichungen der Elektrodynamik in kovarianter Formulierung? (2 Punkte)

b) Wie hängen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ mit dem Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ zusammen? (2 Punkte)

c) Wie ist das Potential A^μ definiert? Wie lautet der Zusammenhang zwischen Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ und Potential A_μ? (2 Punkte)

d) Leite hieraus den Zusammenhang zwischen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ und den Potentialen her. (2 Punkte)

e) Was versteht man unter der Eichsymmetrie des Feldstärketensors? Beweise die Invarianz des Feldstärketensors unter Eichtransformationen. (2 Punkte)

f) Wie sind Poincaré Transformationen definiert? Was ist die definierende Eigenschaft der Lorentz Transformationen? (2 Punkte)

g) Wie transformiert der Feldstärketensor unter Poincaré Transformationen? Warum müssen physikalische Gesetze mit Hilfe von Tensoren formuliert werden? (2 Punkte)

h) Welches vollständige Funktionensystem ist geeignet um elektrostatische Probleme mit Randbedingungen auf der Sphäre zu lösen? Warum ist die Vollständigkeit hierfür entscheidend? (2 Punkte)

i) Betrachte folgende Lorentztranformation

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\beta = \frac{v}{c}$ und $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$. Was ist die physikalische Interpretation dieser Transformation? Wie transformieren sich $\vec{E}$ und $\vec{B}$? Was schlußfolgerst du somit für den Fall, dass im ursprünglichen System kein Magnetfeld vorhanden war? (7 Punkte)

j) Wie lautet das Liénard-Wiechert Potential einer bewegten Ladung q mit Masse m? Welche Gleichung drückt die Retardierung von A^μ aus? Was bedeutet sie physikalisch? (3 Punkte)

2. Metallkugel im homogenen Feld (2+8+3+4)=17 Punkte

Wir betrachten ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E}_0$ entlang der z-Achse. In dieses wird nun eine ungeladene Metallkugel ($q = 0$) vom Radius R gesetzt.

a) Wie lautet, unter Berücksichtigung der Symmetrie des Problems, die allgemeine Entwicklung des Potentials Φ für $r \geq R$?
Tipp: Legendre-Polynome. (2 Punkte)

b) Welche Randbedingungen muss das Potential in diesem Ansatz für $r \to \infty$ und für $r = R$ erfüllen? Nutze diese und $q = 0$, um die Entwicklungskoeffizienten von Φ zu fixieren, so dass

$$\Phi(r,\theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos(\theta)\,, \quad r \geq R.$$

Interpretiere das Resultat! Was gilt für das Potential Φ auf der Kugeloberfläche und im Inneren der Kugel? (8 Punkte)

c) Bestimme die Komponenten des elektrischen Feldes $\vec{E}$ und somit die Oberflächenladungsdichte σ zu

$$\sigma = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos(\theta).$$

(3 Punkte)

d) Wie lautet der Ausdruck für die Feldenergie W? Interpretiere die entsprechenden Terme und berechne sie! (4 Punkte)

3. Teilchenbewegung in einer elektromagnetischen Welle (6+4+10)=20 Punkte

Seien $k, m, n \in \mathbb{R}^{1,3}$, so dass $\langle n, k\rangle = \langle m, k\rangle = \langle k, k\rangle = \langle n, m\rangle = 0$, $\langle n, n\rangle = \langle m, m\rangle = -N^2$ mit $N \in \mathbb{R}$. Hierbei bezeichnet $\langle a, b\rangle = a^\mu b_\mu$ das Minkowski-Skalarprodukt. Die Komponenten des Feldstärketensors einer elektromagnetischen Welle lauten

$$F_{\mu\nu} = (k_\mu m_\nu - m_\mu k_\nu) \sin(\langle k, x\rangle) + (k_\mu n_\nu - n_\mu k_\nu) \cos(\langle k, x\rangle).$$

a) Wie lauten die Einstein-Lorentz-Gleichungen

$$mc\, x''(s)^\mu = \frac{q}{c} F(x(s))^\mu{}_\nu x'(s)^\nu$$

für die Bahnkurve $x(s)$ eines geladenen Teilchens der Masse m und der Ladung q im oben definierten Feld $F_{\mu\nu}$. Verwende hierbei die Parametrisierung nach der Bogenlänge s (Was bedeutet das?). Zeige, dass hieraus folgt, dass

$$\langle k, x''(s)\rangle = 0,$$

und somit

$$\langle k, x\rangle = a + bs.$$

Wodurch sind a und b in diesem Fall bestimmt? (6 Punkte)

b) Zeige, dass nach Umparametrisierung $x(s) \equiv y(\chi(s))$ mit $\chi(s) = a + bs$ aus der Bewegungsgleichung für die Bahnkurve die Differentialgleichung

$$y''(\chi) = A \left\{ k \left[\langle n, y'(\chi)\rangle \cos(\chi) + \langle m, y'(\chi)\rangle \sin(\chi) \right] - n\cos(\chi) - m\sin(\chi) \right\}$$

für $A = \frac{q}{mc^2 b}$ folgt, wobei $y'(\chi) = \frac{d}{d\chi} y(\chi)$.

Tipp: Zeige, dass $\langle k, y'(\chi)\rangle = 1$. (4 Punkte)

c) Überprüfe, dass die Differentialgleichung aus dem vorherigen Aufgabenteil von

$$y(\chi) = A((n - \beta k)\cos(\chi) + (m - \alpha k)\sin(\chi)) + \gamma\chi + \delta$$

mit $\gamma, \delta \in \mathbb{R}^{1,3}$ gelöst wird, wobei $\alpha = \langle m, \gamma\rangle$, $\beta = \langle n, \gamma\rangle$, $\langle k, \gamma\rangle = 1$, $\langle k, \delta\rangle = 0$.

(10 Punkte)

4. Magnetische Feldkonfigurationen (2+2+5+2+5+1+2+4+2*+2*)=27 Punkte

Ein unendlich langer Leiter mit kreisförmigem Querschnitt mit Fläche πa^2 erstreckt sich längs der z-Achse. Er wird vom konstanten Strom I durchflossen.

a) Welche Maxwell-Gleichungen bestimmen $\vec{B}$ in diesem Fall? (2 Punkte)

b) Gib die Stromdichte $\vec{j}(\vec{x})$ des Leiters an. Verwende hier den Zusammenhang $\vec{j}(\vec{x})dV = I(\vec{x})d\vec{s}$ mit dem Strom $I(\vec{x})$ pro Einheitsfläche für ein infinitesimales Volumenelement dV und Wegelement $d\vec{s}$. (2 Punkte)

c) Wähle Zylinder-Koordinaten für das Feld $\vec{B} = B_r\vec{e}_r + B_\phi\vec{e}_\phi + B_z\vec{e}_z$ und den Gradienten. Zeige, dass dann die Bestimmungsgleichungen für $\vec{B}$ gegeben sind durch

$$\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} = 0\,, \quad \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0\,, \quad \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rB_\phi) - \frac{\partial B_r}{\partial \phi}\right) = \frac{4I}{ca^2}\theta(a - r)\,,$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0\,.$$

(5 Punkte)

d) Von welchen Variablen (r, ϕ, z) kann $\vec{B}$ aus Symmetriegründen nur abhängen? Wie vereinfachen sich dann die Gleichungen aus c)? Gib die vereinfachten Gleichungen an. (2 Punkte)

e) Löse nun die Differentialgleichungen für $\vec{B}$ aus d) für die beiden Gebiete $r > a$ und $r < a$. Benutze hierbei die Stetigkeit von $\vec{B}$ bei $r = a$. Setze weiterhin auftretende, unphysikalische Integrationskonstanten auf Null unter der Annahme, dass das Feld nicht singulär ist und kein stromunabhängiges, äusseres Magnetfeld vorliegt. (5 Punkte)

Betrachte nun eine lange Zylinderspule (auch Solenoid genannt, siehe Abbildung 1 im Anhang) der Länge l längs der z-Achse mit n Windungen pro Längeneinheit. Es fließe ein konstanter Strom I.

f) Argumentiere, dass die Gleichungen aus c) weiterhin gültig sind wenn die Spule sehr lang ist. Was gilt für die Symmetrie des Problems und die Abhängigkeiten von $\vec{B}(r, \phi, z)$? (1 Punkt)

g) Bestimme $\vec{j}$ aus dem Strom I, der Anzahl n der Windungen pro Längeneinheit, dem inneren Radius a und dem äußeren Radius b der Spule. (2 Punkte)

h) Gib die Bestimmungsgleichungen für $\vec{B}$ an und integriere sie. Wähle die Integrationskonstanten hierbei so, dass $\vec{B} \to \vec{0}$ für $r \to \infty$ und $\vec{B}$ nicht singulär auf der z-Achse ist. Zeige insbesondere, dass

$$B_z = -\frac{4\pi}{c} \int_\infty^r dr\, j_\phi \,.$$

(4 Punkte)

i*) Berechne B_z für die Fälle $r > b$ und $r < a$. (2* Punkte)

j*) Bestätige das Ergebnis für $\vec{B}$ aus i) durch geschickte Wahl eines Wegintegrals und Anwendung des Satzes von Stokes. (2* Punkte)

5. Strahlungsfeld eines Ringstroms **(1+5+8)=14 Punkte**

Betrachte einen Ringstrom in der z-Achse, der innerhalb einer Kugel vom Radius R begrenzt ist:

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = f(r)\, [\vec{e}_z \wedge \vec{x}]\, e^{-i\omega t} \,,$$

wobei $\vec{e}_z$ den Einheitsvektor in z-Richtung bezeichnet und $r = |\vec{x}|$.

a) Wie lautet das von j^μ erzeugte Potential $A^\mu(\vec{x}, t)$ allgemein? (1 Punkt)

b) Zeige, dass für das Fernfeld $|\vec{x}| \gg R$ in der Langwellennäherung $R \ll \lambda$ mit $k = \frac{\omega}{c}$ gilt

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \int d^3x'\, f(r')\, [\vec{e}_z \wedge \vec{x}']\, (1 - ikr' \cos(\gamma)) \,,$$

wobei $r = |\vec{x}|$, $r' = |\vec{x}'|$ und $\gamma = \angle(\vec{x}, \vec{x}')$ den Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{x}'$ bezeichnet.
Tipp: Zeige, dass $|\vec{x} - \vec{x}'| \approx r - r' \cos(\gamma)$ für die Fernfeld-Näherung. (5 Punkte)

c) Zeige mit

$$C := \int_0^R dr'\, r'^4 f(r') \,, \quad \cos(\gamma) = \cos(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta)\sin(\theta')\cos(\phi - \phi') \,,$$

sowie den Integralen aus dem Anhang, dass

$$A_x(\vec{x}, t) = ik\frac{4\pi C}{3r} \sin(\theta)\sin(\phi) e^{i(kr - \omega t)} \,, \quad A_y(\vec{x}, t) = -ik\frac{4\pi C}{3r} \sin(\theta)\cos(\phi) e^{i(kr - \omega t)} \,,$$
$$A_z(\vec{x}, t) = 0 \,.$$

Wie lautet $\vec{A}(\vec{x}, t)$ in Kugelkoordinaten? (8 Punkte)

Anhang: Einige nützliche Formeln und Relationen

a) Das Minkowski-Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist definiert durch die Minkowski-Metrik $g = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ als Paarung von Vierer-Vektoren x, y,

$$\langle x, y\rangle = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu \, .$$

b) Nabla-Operator in Zylinder-Koordinaten $(x,y,z) = (r\cos(\phi), r\sin(\phi), z)$:

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\vec{e}_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \, ,$$

wobei die Basis-Vektoren in kartesischen Koordinaten lauten:

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \, , \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \, , \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \, .$$

c) Nabla-Operator in Kugel-Koordinaten $(x,y,z) = (r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\theta))$:

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\vec{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\vec{e}_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \, ,$$

wobei die Basis-Vektoren in kartesischen Koordinaten lauten:

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \, , \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \, , \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \, .$$

d) Trigonometrische Integrale:

$$\int_0^\pi d\theta \, \sin^3(\theta) = \frac{4}{3} \, , \quad \int_0^\pi d\theta \, \sin(\theta)\cos^2(\theta) = \frac{2}{3} \, .$$

Im Folgenden verwenden wir das Raumwinkelelement $d\Omega = d\theta d\phi \sin(\theta)$:

$$\int d\Omega \sin^2(\theta)\sin(\phi)\cos(\phi) = 0 \, , \quad \int d\Omega \sin^2(\theta)\sin^2(\phi) = \int d\Omega \sin^2(\theta)\cos^2(\phi) = \frac{4\pi}{3} \, .$$

e) Die ersten Legendrepolynome lauten:

$$P_0(x) = 1 \, , \quad P_1(x) = x \, , \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \, .$$

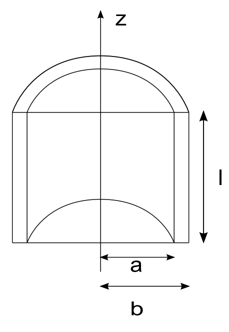

Abbildung 1: Querschnitt der Spule aus Aufgabe 4 f) - j)