Übungen Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm

Quickies

1. *Grundlagen der klassischen Mechanik*
   a) Was versteht man unter dem Wirkungsprinzip der klassischen Mechanik? Leite hieraus explizit die Euler-Lagrange Gleichungen her.
   b) Was sind Erhaltungsgrößen? Was ist der Zusammenhang zwischen kontinuierlichen Symmetrien und Erhaltungsgrößen?
   c) Wie ist die Hamiltonfunktion definiert? Leite explizit die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen her.

Anwesenheitsaufgaben

1. *Wiederholung einiger Begriffe aus der Analysis*

   Eine zentrale Rolle in der Elektrodynamik spielen das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld $\vec{B}$. Sie genügen den sogenannten Maxwellgleichungen, welche mit Hilfe von Differentialoperatoren formuliert sind. Im Rahmen dieser Aufgaben sollen die Definition und einige Eigenschaften gängiger Differentialoperatoren studiert werden.

   a) Sei $\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine glatte Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist das Gradientenfeld von Φ wie folgt definiert:

$$\operatorname{grad}\Phi(x) = \left(\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x^1}, \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x^n}\right)^T . \tag{1}$$

   Ist weiterhin $\vec{e}_i, i = 1, \ldots, n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$,$\vec{V} = \sum_{i=1}^n V^i(x)\vec{e}_i$ ein Vektorfeld, so ist die Divergenz dieses Vektorfeldes als

$$\operatorname{div}\vec{V} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} V^i(x) \tag{2}$$

   definiert.
   Wenn $\vec{V} = \nabla\Phi(x)$ ein Gradientenfeld ist, so ist seine Divergenz gleich $\Delta\Phi(x)$, wobei $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial(x^i)^2}$ der Laplace-Operator ist.
   Andererseits ist die Rotation eines Vektorfeldes nur dann wieder ein Vektorfeld, wenn die Dimension 3 ist. Im $\mathbb{R}^3$ hat man

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \nabla \wedge \vec{V}, \tag{3}$$

   wobei

$$(\nabla \wedge \vec{V})^i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial V^k}{\partial x^j}. \tag{4}$$

   Zeige durch explizites Ausrechnen mit Hilfe des ϵ-Tensors:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} &= \nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{A}) = 0, \\ \operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi(x) &= \nabla \wedge \nabla\Phi(x) = 0 \ . \\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} \end{aligned} \tag{5}$$

2. *Der Satz von Stokes*
   Es sei $\mathcal{C}$ ein glatter, geschlossener Weg und es sei $F(\mathcal{C})$ eine von $\mathcal{C}$ begrenzte, ebenfalls glatte (orientierbare) Fläche. Für ein glattes Vektorfeld $\vec{V}$, das auf F inklusive seines Randes definiert ist, gilt
$$\int_{F(\mathcal{C})} d\sigma(\nabla \wedge \vec{V}) \cdot \vec{n} = \oint_{\mathcal{C}} d\vec{s} \cdot \vec{V}. \tag{6}$$
   Hierbei ist $\vec{n}$ die Flächennormale auf $F(\mathcal{C})$, $d\vec{s}$ ist das gerichtete Linienelement auf $\mathcal{C}$.

   a) Sei $\overrightarrow{F} = (y, x, 0)^T$ ein Vektorfeld auf dem $\mathbb{R}^3$. Zeige zum einen mit Hilfe des Satzes von Stokes und zum anderen explizit die Wegunabhängigkeit des Wegintegrals von $\overrightarrow{F}$ anhand eines Kreisweges auf der $x - y$-Ebene.

3. *Der Satz von Gauss*
   Es sei F eine glatte, orientierbare, geschlossene Fläche, die in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet ist. Es sei $V(F)$ das von dieser Fläche eingeschlossene Volumen und es sei $\vec{V}$ ein glattes Vektorfeld. Dann gilt
$$\int_{V(F)} d^3x \nabla \cdot \vec{V} = \int_F d\sigma \vec{V} \cdot \vec{n}, \tag{7}$$
   wobei $\vec{n}$ die nach Aussen gerichtete Flächennormale am Ort des Flächenelements $d\sigma$ ist.

   a) Sei $\rho(r) = 3Q/(4\pi R^3)\Theta(R - r)$ eine homogene und kugelsymmetrische Ladungsverteilung. Zeige mit Hilfe von $\nabla \cdot \overrightarrow{E} = 4\pi\rho$ und der Symmetrie:
$$E_{\text{innen}}(r) = \frac{Q}{R^3} r \quad E_{\text{aussen}}(r) = \frac{Q}{r^2} \tag{8}$$
   mit $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.

Hausaufgaben

1. *Teilchen in einem elektromagnetischen Feld (10 Punkte)*

   a) Zeige, dass man für die Lagrangefunktion
$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - e\Phi(\vec{x}, t) + \frac{e}{c} \langle \dot{\vec{x}}, \vec{A}(\vec{x}, t) \rangle,$$
   die bekannten Bewegungsgleichungen für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld bekommt.
   Hierbei bezeichnet Φ das Potential des elektrischen Feldes und $\vec{A}$ das Vektorpotential des Magnetfelds. Zu einem elektrischen Feld $\vec{E}$ und magnetischem Feld $\vec{B}$ bestehen folgende Beziehungen:
$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$
   Es bezeichnet hierbei e die Ladung des Teilchens und c die Lichtgeschwindigkeit.
   (4 Punkte)

   b) Zeige ferner, dass die Lagrangefunktion unter den sogenannten Eichtransformationen sich nur um eine totale Ableitung ändert:
$$\begin{aligned} \vec{A} \quad &\mapsto \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\xi(x, t), \\ \Phi \quad &\mapsto \quad \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \xi(x, t). \end{aligned}$$
   Zeige, dass somit die Bewegungsgleichungen invariant bleiben. (3 Punkte)

   c) Bestimme die zugehörige Hamiltonfunktion. (3 Punkte)