Übungen Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm

Quickies

1. Wie lauten die Maxwellgleichungen der Elektrodynamik ausgedrückt durch den Feldstärke-Tensor?
2. Wie ist der Zusammenhang zwischen F und A? Wie lauten Eichtransformationen und wie transformiert F?
3. Wie ist der duale Feldstärke-Tensor $\hat{F}$ definiert? Schreibe die Komponenten von F und $\hat{F}$ aus.
4. Welche Lorentzskalare lassen sich aus F und $\hat{F}$ bilden und wie lassen sie sich durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ausdrücken?

Anwesenheitsaufgaben

1. *Relativistische Kinematik*

   In dieser Aufgabe sollen einige Konzepte der relativistischen Kinematik eingeführt werden. Diese Kenntnisse sind vor allem zur Analyse hochenergetischer Teilchenkollisionen essentiell. Hierzu müssen insbesondere die Begriffe von Energie und Impuls abgeändert werden, die in der speziellen Relativitätstheorie in einen physikalischen Vierer-Vektor vereinheitlicht werden. Ebenso ist es notwendig, adäquate Größen einzuführen, die vom Bezugssystem unabhängig sind, wie z.B. die Mandelstam-Variablen.

   Die relativistische Wirkung eines Punktteilchens der Masse m lautet

$$S_{\text{mat}} = -mc \int_{s_1}^{s_2} ds = -mc \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\sigma}(\sigma)\frac{dx_\mu}{d\sigma}(\sigma)}d\sigma\,, \tag{1}$$

   wobei $\sigma \mapsto x^\mu(\sigma)$ eine beliebige Parametrisierung bezeichnet.

   a) Wähle die Parametrisierung nach der Zeit, d.h. $\sigma = t$. Wie transformiert sich die Wirkung unter $x^\mu \mapsto x^\mu + a^\mu$ für einen konstanten Vierer-Vektor a^μ? Berechne aus dem Noether-Theorem die zugehörigen Erhaltungsgrößen und interpretiere diese. Definiere hierzu

$$p^\mu = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\frac{dx^\mu}{dt}\,. \tag{2}$$

   b) Wie transformiert p^μ unter Lorentztransformationen? Zeige, dass $p^\mu p_\mu$ unter Poincaré Transformationen invariant ist. Zeige, dass gilt

$$p^\mu p_\mu = m^2c^2 \tag{3}$$

   und

$$cp_0 = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2}\,. \tag{4}$$

   c) Zeige, dass p zeitartig ist und damit, dass es ein Bezugssystem gibt, so dass gilt $p'^\mu = (p'_0, 0)$. Begründe den Namen "Center of Mass System", oder kurz CMS. Schreibe hierzu $p'_0 \equiv p_0^{\text{cms}} = \sqrt{p^\mu p_\mu}$. Was gilt für $m = 0$?

Betrachte nun eine elastisch Zweiteilchen-Reaktion

$$(m_1,\vec{p}_1)+(m_2,\vec{p}_2)\to(m_3,\vec{p}_3)+(m_4,\vec{p}_4)\,, \tag{5}$$

wofür die Energie-Impulserhaltung gilt:

$$p_1^\mu+p_2^\mu=p_3^\mu+p_4^\mu\,. \tag{6}$$

Definiere nun die Lorentz-invarianten *Mandelstam-Variablen* durch

$$\begin{aligned} s &= (p_1+p_2)^\mu(p_1+p_2)_\mu=(p_3+p_4)^\mu(p_3+p_4)_\mu && (7)\\ t &= (p_1-p_3)^\mu(p_1-p_3)_\mu=(p_2-p_4)^\mu(p_2-p_4)_\mu && (8)\\ u &= (p_1-p_4)^\mu(p_1-p_4)_\mu=(p_2-p_3)^\mu(p_2-p_3)_\mu\,. && (9)\end{aligned}$$

d) Berechne s, t und u als Ausdrücke in den Massen m_i, des Impules $\vec{p}_i$ und der Energie E_i und zeige, dass

$$s+t+u=c^2(m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2)\,, \tag{10}$$

d.h. s, t und u sind nicht unabhängig.

e) Zeige, dass $s=(p_0^{\text{cms}})^2=\frac{1}{c^2}E^{\text{cms}}$ gilt.

Hausaufgaben **(32 Punkte)**

1. *Das Vektorpotential (Poincaré-Lemma)* 12 Punkte

Wir haben in der Anwesenheitsaufgabe A.9.1 die Schreibweise $F_{\mu\nu}=(dA)_{\mu\nu}$ kennengelernt

$$(dA)_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu. \tag{11}$$

Kovariante antisymmetrische Tensoren vom Rang n nennt man auch n-*Formen*, d.h. die Komponenten des Vektorpotential A_μ sind Komponenten einer 1-Form und die Komponenten der Feldstärke $F_{\mu\nu}$ die einer 2-Form. Die ($\mathbb{R}$-lineare) Abbildung

$$d:\ \{n\text{-Formen}\}\longrightarrow\{(n+1)\text{-Formen}\} \tag{12}$$

heißt die *äußere Ableitung*. Wir geben hier die explizite Form von d nur für 1- und 2-Formen an

$$\begin{aligned}(dA)_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu, \quad A\in\{1-\text{Formen}\}, && (13)\\ (dF)_{\mu\nu\rho} &= \partial_\mu F_{\nu\rho}+\partial_\nu F_{\rho\mu}+\partial_\rho F_{\mu\nu}, \quad F\in\{2-\text{Formen}\}.\end{aligned}$$

a) Zeige für eine 1-Form A, dass $(d^2A)_{\mu\nu\rho}=((d\circ d)A)_{\mu\nu\rho}=0$, d.h. wenn es eine 1-Form A gibt, so dass $F=dA$ gilt, ist $dF=0$ trivial erfüllt. (2 Punkte)

Betrachte nun eine Zwei-Form, z.B. den Feldstärke-Tensor F der Elektrodynamik. Hier wollen wir die umgekehrte Logik zu a) verfolgen, also zeigen, dass alleine aus $dF=0$, den homogenen Maxwell-Gleichungen im Falle der Elektrodynamik, die Existenz einer 1-Form, des Potentials A, folgt. Wir postulieren, dass das Vektorpotential A komponentenweise durch

$$A_\mu(x)=\int_0^1 d\tau\ x^\rho\tau F_{\rho\mu}(\tau x) \tag{14}$$

aus $F^{\mu\nu}$ rekonstruiert werden kann. Beachte, dass diese Formel nur für nicht singuläre $F_{\mu\nu}$ gilt. Dies schließt insbesondere das Coulomb-Feld aus.

b) Zeige, dass für das so definierte A in der Tat gilt

$$F_{\mu\nu}(x)=(dA)_{\mu\nu}(x). \tag{15}$$

(5 Punkte)

Die Gleichung (14) mit (15) bedeutet, dass eine 2-Form $F_{\mu\nu}$ mit $(dF)_{\mu\nu\rho} = 0$ als die äußere Ableitung eines Potentials A_μ dargestellt werden kann. Dies bezeichnet man auch als *Poincaré-Lemma.* Das Lemma sagt, dass für eine sternförmige offene Umgebung $U \in \mathbb{R}^m$ eine Form H mit $dH = 0$ eine „Stamm-Form“ G besitzt, sodass $H = dG$. Also ist die Bedingung $dH = 0$ eine Integrabilitätsbedingung in dem Sinne, dass das Integral (14) Sinn macht.

c) Berechne das Vektorpotential $A(x)$ für
   - ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E}(x) = \vec{E}^{(0)}$,
   - ein homogenes Magnetfeld $\vec{B}(x) = \vec{B}^{(0)}$,
   - die elektromagnetische Welle

$$F_{\mu\nu}(x) = A(k_\mu n_\nu - k_\nu n_\mu)\sin(k^\lambda x_\lambda + \alpha). \tag{16}$$

(3 Punkte)

d) Errate ein Vektorpotential für das COULOMB-Feld mit dem Feldstärkentensor

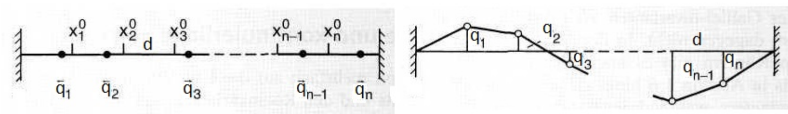
$$F_{\mu\nu}(x) = q\frac{x_\mu \ell_\nu - x_\nu \ell_\mu}{(\langle x, \ell\rangle^2 - \langle x, x\rangle)^{3/2}}, \tag{17}$$

wobei $\langle \ell, \ell\rangle = 1$. (2 Punkte)

2. *Lagrange Mechanik von Feldern - Kontinuumsmechanik* (20 Punkte)

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die Maxwellsche Theorie der Elektrodynamik als Spezialfall der Theorie von klassischen Feldern verstanden werden kann. Um die hierbei notwendigen Konzepte besser zugänglich zu machen, werden wir Felder $\phi(\vec{x}, t)$ als Kontinuum-Limes eines diskreten Systems einführen. Durch Analogiebetrachtung werden wir dann auch das Vektorpotential $A(\vec{x}, t)$ als Feld verstehen.

Betrachte eine Kette der Länge L bestehend aus n identischen Massepunkten der Masse m, die über masselose Federn mit Federkonstante D miteinander verbunden sind. Der



Ruhepunkt der Massen sei mit x_i^0, $i = 1, \ldots, n$ bezeichnet und der Abstand $x_{i+1}^0 - x_i^0$, $i = 1, \ldots, n-1$ sei d. Wir betrachten nun entweder rein longitudinale oder rein transversale Auslenkungen mit $q_i(t) = x_i(t) - x_i^0(t)$. Die Endpunkte sind fix, d.h. $q_0(t) = \dot{q}_0(t) = q_{n+1}(t) = \dot{q}_{n+1}(t) = 0$.

a) Zeige, dass für kleine Auslenkungen $q_i(t)$ die Lagrange-Funktion $L = T - V$ in beiden Fällen dieselbe Form annimmt:

$$L = \frac{1}{2}m\sum_{i=0}^{n}(\dot{q}_i(t)^2 - \omega_0^2(q_{i+1} - q_i)^2) \tag{18}$$

Hierbei ist $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ für longitudinale und $\omega_0 = \sqrt{\frac{S}{md}}$ für transversale Schwingungen. Hierbei bezeichnet S die Federspannung. (3 Punkte)

b) Bestimme die Euler-Lagrange Gleichungen und zeige durch Einzetzen, dass die Lösungen gegeben sind durch

$$q_j(t) = A\sin\left(j\frac{p\pi}{n+1}\right)e^{i\omega_p t}, \tag{19}$$

mit $p \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Frequenzen ω_p lauten

$$\omega_p = 2\omega_0 \sin\left(\frac{p\pi}{2(n+1)}\right) . \tag{20}$$

(2 Punkte)

Nun führen wir den Kontinuum-Limes durch und erhalten so eine schwingende Saite. Hierzu betrachten wir den Doppel-Limes $n \to \infty$, $d \to 0$, so dass $dn =$ konst.. Im Kontinuum-Limes wird der diskrete Parameter i durch die kontinuierliche Variable x ersetzt und die Auslenkung des i-ten Teilchens $q_i(t)$ durch das *Feld* $\phi(t,x)$ beschrieben als

$$q_i(t) = \phi(t,x)\big|_{x=id} . \tag{21}$$

Hier haben wir den linken Aufhängepunkt der Kette in den Koordinatenursprung gelegt wurde.

c) Argumentiere, dass im Kontinuum-Limes gilt

$$q_{i+1} - q_i = d\frac{\partial\phi}{\partial x}\bigg|_{x=id+d/2} , \quad q_i - q_{i-1} = d\frac{\partial\phi}{\partial x}\bigg|_{x=id-d/2} , \tag{22}$$

$$q_{i+1} - q_i - (q_i - q_{i-1}) = d^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\bigg|_{x=id} . \tag{23}$$

(3 Punkte)

d) Wie lautet dann die Bewegungsgleichung? Führe hierzu die Massendichte $\rho = m/d$, das Elastizitätsmodul $\eta = Dd$ und die Wellengeschwindigkeit $v^2 = \eta/\rho$ ein (transversale Schwingung: $v^2 = S/\rho$), so dass gilt

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 . \tag{24}$$

Zeige weiter aus (20), dass für die Frequenz ω_p nun $\omega_p = \omega_0' p$ gilt. ω_0' nennt man daher auch *Grundfrequenz.* (2 Punkte)

e) Bestimme die Lagrange-Funktion im Kontinuum-Limes. Ersetze hierzu d durch das infinitesimale Integrationsmaß dx und erhalte daraus

$$L = \int_0^L dx\mathcal{L} , \quad \mathcal{L} = \frac{\rho}{2}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}^2 - v^2\frac{\partial\phi}{\partial x}^2\right] . \tag{25}$$

Die Funktion $\mathcal{L}$ bezeichnet die *Lagrange-Dichte.* (2 Punkte)

f) Begründe, dass sich das Hamiltonsche Prinzip dann ergibt als $\delta S[\phi] = 0$ für beliebige Feldvariation $\delta\phi$ mit $\delta\phi = 0$ fuer $t = t_0, t_1$. Leite für allgemeine Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ die Euler-Langrange Gleichungen her. Zeige, dass die Bewegungsgleichungen (24) aus (25) folgen. (3 Punkte)

g) Begründe die Definition für den kanonischen Impuls und die *Hamilton Dichte*

$$\pi(x,t) = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} , \quad \mathcal{H} = \dot{\phi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} - \mathcal{L} . \tag{26}$$

Wie lautet dann die Hamilton-Funktion H. Berechne $\mathcal{H}$ für (25). (2 Punkte)

Betrachte nun die Wirkung des elektromagnetischen Feldes,

$$S_{\text{em}} = -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} . \tag{27}$$

h) Zeige, dass in Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ folgt, dass $\mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu$. (1 Punkt)

i) Bestimme die Bewegungsgleichungen und vergleiche mit der Kette. (1 Punkt)

j) Welche Bewegungsgleichung für A ergibt sich, wenn der Term $\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{4\pi}{c}A^\mu j_\mu$ addiert wird? (1 Punkt)