Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übung 11
8. Januar 2010
WS09/10

Übungen Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm

Quickies

1. Wie ist die äussere Ableitung d für 1- und 2-Formen definiert?
2. Wie ist die Euler-Lagrange-Gleichung für die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$?
3. Wie sind der kanonische Impuls π und die Hamilton-Dichte $\mathcal{H}$ definiert?
4. Wie ist die Wirkung S_{em} für das elektromagnetische Feld?

Anwesenheitsaufgaben

1. *Energie-Impulstensor des elektromagnetischen Feldes*

   Für einen Tensor $A^{\mu_1\cdots\mu_k}$ k-ter Stufe mit $\partial_{\mu_1}A^{\mu_1\cdots\mu_k} = 0$ sind folgende Integrale über eine räumliche Fläche zeitliche Konstanten der Bewegung

$$Q^{\mu_2\cdots\mu_k} := \int_{x_0=ct} A^{0\mu_2\cdots\mu_k} d^3x\,. \qquad (1)$$

   a) Zeige, dass diese Integrale in der Tat Erhaltungsgrößen definieren.
   b) Zeige weiter, dass für ein Vektorfeld $Y_\mu(x)$ mit $\partial_\mu Y_\nu + \partial_\nu Y_\mu = 0$ und ein symmetrisches Tensorfeld $A^{\mu\nu}$ mit $\partial_\mu A^{\mu\nu} = 0$ gilt, dass mit $K^\mu = A^{\mu\nu}Y_\nu$

$$\partial_\mu K^\mu = 0\,. \qquad (2)$$

   Was ist die Erhaltungsgröße?

   Als ein Beispiel eines solchen Tensors zweiter Stufe ist der *Energie-Impuls-Tensor* $T^{\mu\nu}$. In dieser Aufgabe wollen wir ihn für das elektromagnetische Feld $F^{\mu\nu}$ diskutieren. Er ist definiert als

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left[F_{\alpha\lambda}F^{\lambda\nu}\eta^{\alpha\mu} + \frac{1}{4}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}\eta_{\mu\nu}\right]. \qquad (3)$$

   c) Welche Transformations- und Symmetrieeigenschaften besitzt $T^{\mu\nu}$? Berechne die Spur T^μ_μ.
   d) Zeige, dass gilt $\partial_\mu T^{\mu\nu} = f^\nu := \frac{1}{c}j_\mu F^{\mu\nu}$. Wie lautet die Gleichung für $\nu = 0$? Was gilt für den Fall des elektromagnetischen Feldes im Vakuum, d. h. $j^\mu = 0$? Gib die Erhaltungsgrößen an.
   e) Zeige, dass die *Energiedichte* $\epsilon(\vec{x},t) := T^{00}$ gegeben ist durch

$$\epsilon(\vec{x},t) = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right). \qquad (4)$$

   Warum macht die Interpretation als Energiedichte Sinn? Vergleiche mit der Definition der Hamiltondichte aus H.10.2.
   f) Zeige, dass auch gilt

$$T^{0i} = S^i\,, \qquad (5)$$

   wobei $\vec{S}$ den *Poynting-Vektor* $\vec{S} = \frac{1}{4\pi}\left[\vec{E}\wedge\vec{B}\right]$ bezeichnet. Er wird auch als Energiestromdichte interpretiert.

Hausaufgaben **(24 Punkte)**

1. *Der Energie-Impuls-Tensor von Punktladungen* 8 Punkte

   Der Energie-Impuls-Tensor eines Systems von Punktladungen mit den Massen m_i, die sich auf den Bahnkurven $x_i(\tau_i)$ bewegen (τ_i ist die Eigenzeit), ist gegeben durch

$$T^{\mu\nu}_{\text{Materie}}(y) = \sum_{i=1}^{N} m_i c \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_i \, x'^{\mu}_i(\tau_i) x'^{\nu}_i(\tau_i) \delta^{(4)}(y - x(\tau_i)). \tag{6}$$

   Die Größen

$$P^\alpha = \frac{1}{c} \int d^3x \, T^{0\alpha}_{\text{Materie}}(x) \Big|_{x^0=ct} \tag{7}$$

   sind Erhaltungsgrößen und bilden einen Vierervektor $P = (P^0, \vec{P})$, wobei

$$P^0 = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{N} T_i \quad \text{mit} \quad T_i = \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}_i(t)|^2}{c^2}}}, \tag{8}$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \quad \text{mit} \quad \vec{p}_i = \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}_i(t)|^2}{c^2}}}. \tag{9}$$

   Hierbei ist T_i bzw. $\vec{p}_i$ die (relativistische) kinetische Energie, bzw. der (relativistische) Impuls des i-ten Teilchens. Dies sind allerdings nicht die einzigen erhaltenen Größen, denn es lassen sich weitere zeitunabhängige Größen bilden

$$M^{0i}_{\text{Materie}} = \frac{1}{c} \int d^3x \, \left(T^{00}_{\text{Materie}}(x) x^i - T^{0i}_{\text{Materie}}(x) x^0\right)_{x^0=ct}, \tag{10}$$

$$M^{ij}_{\text{Materie}} = \frac{1}{c} \int d^3x \, \left(T^{0i}_{\text{Materie}}(x) x^j - T^{0j}_{\text{Materie}}(x) x^i\right)_{x^0=ct}. \tag{11}$$

   a) Zeige, dass gilt (8 Punkte)

$$M^{0i}_{\text{Materie}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k c}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}_k|^2}{c^2}}} \left(x^i_k(t) - t \frac{dx^i_k}{dt}(t) \right), \tag{12}$$

$$M^{ij}_{\text{Materie}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}_k|^2}{c^2}}} \left(\frac{dx^i_k}{dt}(t) x^j_k(t) - \frac{dx^j_k}{dt}(t) x^i_k(t) \right) \tag{13}$$

   und dass sie erhalten sind.

2. *Punktladungen im elektromagnetischen Feld* (16 Punkte)

   Gegeben sei ein System bestehend aus N Punktladungen der Massen m_i, $i = 1, \ldots, N$ und einem elektromagnetischen Feld.

   a) Zeige, dass die folgenden Größen erhalten sind (16 Punkte)

$$P^0 = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k c}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}_k|^2}{c^2}}} + \frac{1}{8\pi c} \int d^3x \, \left(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2\right), \tag{14}$$

$$\vec{P} = \sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k(t) + \frac{1}{4\pi c} \int d^3x \, \left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right), \tag{15}$$

$$\vec{R}_0 = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \vec{x}_k(t)}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}_k|^2}{c^2}}} + \frac{1}{8\pi c^2} \int d^3x \, \left(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2\right) \vec{x} - t\vec{P}, \tag{16}$$

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^{N} (\vec{x}_k(t) \wedge \vec{p}_k(t)) + \frac{1}{4\pi c} \int d^3x \, \left(\vec{x} \wedge \left[\vec{E} \wedge \vec{B}\right]\right), \tag{17}$$

wobei wie zuvor

$$\vec{p}_k(t) = \frac{m_k \vec{v}_k(t)}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}_k|^2}{c^2}}}. \tag{18}$$

Hinweis: Benutze, dass der Energie-Impuls-Tensor die folgende Gestalt hat

$$T^{\mu\nu}_{\text{total}} = T^{\mu\nu}_{\text{Materie}} + T^{\mu\nu}_{\text{el.mag.}}, \tag{19}$$

wobei $T^{\mu\nu}_{\text{el.mag.}}$ durch (3) gegeben ist.