Übungen Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm

Quickies

1. Was muss ein Tensor $A^{\mu_1 \cdots \mu_k}$ erfüllen, um Erhaltungsgrössen zu definieren? Gib diese Erhaltungsgrössen an.

2. Welche Gleichung erfüllt der Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ der Elektrodynamik mit Materie?

3. Welche Erhaltungsgrössen lassen sich mittels T definieren? Interpretiere sie physikalisch.

4. Wie lautet die relativistische Energie und der relativistische Impuls?

Anwesenheitsaufgaben

1. *Eigenschaften ebener elektromagnetischer Wellen*
In dieser Aufgabe sollen einige einfache Eigenschaften von elektromagnetischen Wellen im Vakuum untersucht werden. Diese Wellenlösung treten als Lösungen der quellenfreien Maxwellgleichungen auf und begründen die klassische Theorie von Licht als Wellenphänomen. Später in der Quantenmechanik wird dieses Konzept durch den Welle-Teilchen-Dualismus ersetzt, der die Einführung eines Licht-Quantums, des Photons, erfordert.
   a) Was ist der Unterschied zwischen ebenen Wellen und Kugelwellen?
   b) Warum bilden die Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$ und die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ein Dreibein?
   c) Wie hängen $\vec{B}$ und $\vec{E}$ zusammen? Wie ist ihre Phasenbeziehung?
   d) Was sind linear, zirkular und elliptisch polarisierte Wellen?
   e) Vergleiche die Mittelwerte der elektrischen und magnetischen Energiedichte.
   f) Gib den Poyntingvektor an. Welche Bedeutung haben Betrag und Richtung?

2. *Das Vektorpotential einer bewegten Punktladung - das Lienard-Wiechert Potential*

   Hier soll das Potential einer relativistischen Punktladung der Masse m und Ladung q bestimmt werden mittels der retardierten Greensfunktion der Elektrodynamik.

   Wie auf Blatt 8 in Anwesenheitsaufgabe 8.1 hergeleitet wurde lautet die retardierte Greensfunktion
$$G_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \Theta(t) \frac{c}{4\pi r} \delta(r - ct) \,, \tag{1}$$
   wobei $r = |\vec{x}|$. Die so definierte Funktion ist dabei als Operatorinverses zum D'Alembert-Operator $\Box$ definiert, d.h. als Lösung der Gleichung
$$\Box G(\vec{x}, t) = \delta^{(3)}(\vec{x}) \delta(t) \,. \tag{2}$$
   a) Zeige, dass eine spezielle Lösung der inhomogenen D'Alembert-Gleichung $\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$ gegeben ist durch
$$A^\mu(\vec{x}, t) = \int d^3y \frac{j^\mu(\vec{y}, ct - |\vec{x} - \vec{y}|)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \,. \tag{3}$$
   Zeige ferner, dass diese Lösung der Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ genügt.

b) Zeige, dass der Viererstrom j_μ im Wechselwirkungsterm $\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{4\pi}{c} A^\mu j_\mu$ aus Hausaufgabe 10.2.j) für den Fall einer Punktladung im elektromagnetischen Feld gegeben ist als

$$j^\mu(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi} \int_{s_1}^{s_2} x'^\mu(s) \delta^{(4)}(x^\nu - x^\nu(s)) ds \,. \tag{4}$$

Benutze hierbei, dass der Wechselwirkungsterm für eine Punktladung gegeben ist als

$$S_{\text{int}} = -\frac{q}{c} \int_{s_1}^{s_2} A^\mu(x(s)) \frac{dx_\mu}{ds} ds \tag{5}$$

wie in Hausaufgabe 9.3 diskutiert.

c) Zeige, dass das von der Punktladung erzeugte Potential, das sogenannte *Lienard-Wiechert-Potential*, gegeben ist als

$$A^\mu(x) = \frac{q}{4\pi} \frac{x'^\mu(s_0)}{\langle x'(s_0), x - x(s_0) \rangle} \,, \tag{6}$$

wobei s_0 ein implizit über $x^0 - x^0(s_0) = |\vec{x} - \vec{x}(s_0)|$ definierter Parameterwert ist. Veranschauliche diese Bedingung graphisch im Minkowski-Diagramm. Benutze für die obige Rechnung, dass

$$\delta(|x-y|^2) = \frac{1}{2\,|\vec{x} - \vec{y}|} \left[\delta(x_0 - y_0 - |\vec{x} - \vec{y}|) + \delta(x_0 - y_0 + |\vec{x} - \vec{y}|) \right] \,, \tag{7}$$

sowie die Rechenregel für $\delta(f(x))$.

d) Zeige, dass für den zugehöhrigen Feldstärketensor nur die implizite x-Abhängigkeit von s_0 relevant ist und somit gilt

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial s_0} \partial_\mu s_0(x) - \frac{\partial A_\mu}{\partial s_0} \partial_\nu s_0(x) \,. \tag{8}$$

Zeige weiter, dass dann gilt

$$F_{\mu\nu} = \frac{q}{\langle x - x(s_0), x'(s_0) \rangle^2} \left[(x_\mu - x_\mu(s_0)) a_\nu(s_0) - (x_\nu - x_\nu(s_0)) a_\mu(s_0) \right] \tag{9}$$

$$+ \frac{q \, \langle x'(s_0), x'(s_0) \rangle}{\langle x - x(s_0), x'(s_0) \rangle^2} \left[(x_\mu - x_\mu(s_0)) x'_\nu(s_0) - (x_\nu - x_\nu(s_0)) x'_\mu(s_0) \right] \,, \tag{10}$$

wobei gilt, dass

$$a_\mu(s_0) := x''_\mu - x'_\mu(s_0) \frac{\langle x - x(s_0), x''(s_0) \rangle}{\langle x - x(s_0), x'(s_0) \rangle} \,. \tag{11}$$

Hausaufgaben **(28 Punkte)**

1. *Feldstärketensor einer elektromagnetischen Welle* (18 Punkte)
Wir betrachten den Feldstärketensor einer linear polarisierten, monochromatischen elektromagnetischen Welle der Form

$$F(x)(a,b) := F_{\mu\nu}(x) a^\mu b^\nu = A(\langle k, a \rangle \langle n, b \rangle - \langle n, a \rangle \langle k, b \rangle) \sin(\langle k, x \rangle + \delta) \tag{12}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}^4$, wobei $\langle k, n \rangle = 0$. $A \in \mathbb{R}$ heißt die *Amplitude*, $k \in \mathbb{R}^4$ mit $\langle k, k \rangle = 0$ heißt der (lichtartige) *Wellenvektor*, $n \in \mathbb{R}^4$ mit $\langle n, n \rangle = -1$ heißt der (raumartige) *Polarisationsvektor*, und δ heißt die *Phase*. Hierbei ist $\langle a, b \rangle := \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$ das *Minkowski-Skalarprodukt*.

a) Berechne die Tensorkomponenten $F_{\mu\nu}$ von (12) in der Standardbasis. (2 Punkte)

b) Zeige, dass F aus (12) eine Lösung der Maxwellgleichungen in Vakuum (das heißt für die Ladungs-Stromdichte gilt $J(x) = 0$)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = 0, \quad \partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu}(x) = 0, \tag{13}$$

darstellt. (4 Punkte)

c) Zeige, dass für das elektrische Feld $\vec{E}$, dessen Komponenten durch

$$E^i(\vec{x}, t) = F_{0i}(x), \quad (i = 1, 2, 3) \tag{14}$$

gegeben sind, und für das magnetische Feld $\vec{B}$, dessen Komponenten durch

$$B^k(\vec{x}, t) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk} F_{ij}(x), \quad (k = 1, 2, 3) \tag{15}$$

gegeben sind, gilt

$$\vec{E} \perp \vec{k}, \quad \vec{B} \perp \vec{k}, \quad \vec{E} \perp \vec{B}, \quad |\vec{E}| = |\vec{B}|. \tag{16}$$

Hierbei ist $\vec{k}$ der Vektor mit den Komponenten $k^i, (i = 1, 2, 3)$. (6 Punkte)

Wir transformieren jetzt die elektromagnetische Welle (12) mittels einer Lorentz Transformation

$$(\Lambda^* F)(x)(a, b) := F(\Lambda x)(\Lambda a, \Lambda b). \tag{17}$$

d) Zeige, dass $(\Lambda^* F)(x)$ wieder die Form (12) besitzt, wobei der Wellenvektor durch $\Lambda^{-1} k$ und der Polarisationsvektor durch $\Lambda^{-1} n$ gegeben ist. (4 Punkte)

2. *Strahlung einer langsamen Punktladung* (10 Punkte)

a) Betrachte eine Punktladung am Ort $\vec{r}_0(t)$ mit Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$. Zeige für die Ladungs- bzw. Stromdichte, dass $\varrho(\vec{r}, t) = q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$ und $\vec{j}(\vec{r}, t) = \varrho(\vec{r}, t)\vec{v}(t)$. (1 Punkt)

b) Berechne wie in A8.1.g) die elektromagnetischen Potentiale in Lorentzeichung (3 Punkte)

$$\Phi(\vec{r}, t) = \left.\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')| \left(1 - \frac{\vec{r} - \vec{r}_0(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \cdot \frac{\vec{v}(t')}{c}\right)}\right|_{t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r}, t) \frac{\vec{v}(t')}{c}. \tag{18}$$

c) Durch die implizite Retardierung $t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}$ sind diese *Lienard-Wiechert-Potentiale* kompliziert, da die Retardierung nur eine Bestimmungsgleichung für t' ist, d.h. nicht nach t' aufgelöst ist. Weit weg von der Ladung ($r \gg |\vec{r}_0|$) vereinfacht sich jedoch diese Retardierung zur expliziten Form $t' = t - \frac{r}{c}$. Zeige, dass mit der zusätzlichen Annahme $v \ll c$ die führenden Terme der beiden Potentiale lauten (2 Punkte)

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{r} + \frac{q}{r^2} \vec{\beta}_{\text{ret}} \cdot \vec{r} + \mathcal{O}(\beta^2), \quad \text{wobei} \quad \vec{\beta}_{\text{ret}} = \frac{\vec{v}(t - \frac{v}{c})}{c}. \tag{19}$$

d) Zeige für die Felder (die Ladung strahlt also *nur*, wenn sie *beschleunigt* wird) (4 Punkte)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{cr} \vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \dot{\vec{\beta}}_{\text{ret}}) + \mathcal{O}(\frac{1}{r^2}), \quad \vec{B} = \frac{q}{cr} \dot{\vec{\beta}}_{\text{ret}} \times \vec{e}_r + \mathcal{O}(\frac{1}{r^2}) = \vec{e}_r \times \vec{E}. \tag{20}$$