Übungen Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm

Quickies

1. Wie lautet das Liénard-Wiechert Potential?
2. Was sind linear-, zirkular- und elliptisch polarisierte Wellen?
3. Wie ist der Poyntingvektor definiert? Welche Bedeutung haben Betrag und Richtung?
4. Warum sollte der Energie-Impuls-Tensor symmetrisch sein und wie läßt sich dieses erreichen?

Anwesenheitsaufgaben

1. *Strahlungsverlust bei Beschleunigung im kontstanten elektromagnetischen Feld*

   Ein geladenes Teilchen mit Ladung q und Masse m bewege sich in einem konstanten elektromagnetischen Feld mit Feldstärkentensor F.

   a) Zeige: Falls die Bahnkurve $x(s)$ durch die Bogenlänge s parametrisiert wird, so gilt
   $$\langle x''(s), x''(s)\rangle = a = \text{const.} \tag{1}$$
   Berechne a in Abhängigkeit von der Anfangsgeschwindigkeit $x'(0)$.

   b) Zeige, dass der zwischen 0 und s abgestrahlte Viererimpuls durch
   $$P(s) = -\frac{2}{3}q^2 a(x(s) - x(0)) \tag{2}$$
   gegeben ist.

Hausaufgaben **(30 Punkte)**

1. *Elektische Dipolstrahlung* (13 Punkte)

   Betrachte eine periodische Ladungs- bzw. Stromdichte $\varrho(\vec{r},t) = \mathrm{Re}(\varrho(\vec{r})e^{-i\omega t})$ und $\vec{j}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}(\vec{j}(\vec{r})e^{-i\omega t})$, die auf einen endlichen Bereich $r < R_0$ begrenzt sind.

   a) Warum genügt es, das Vektorpotential $\vec{A}$ zu kennen? Zeige mit der Wellenzahl $k = \frac{\omega}{c}$, dass $\vec{A}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}(\vec{A}(\vec{r})e^{-i\omega t})$, wobei $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \vec{j}(\vec{r}')\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$. (2 Punkte)

   b) Zeige, dass im Fernfeld ($r \gg R_0 > r'$) gilt: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr}\int d^3r' \vec{j}(\vec{r}')e^{-ik\vec{e}_r\cdot\vec{r}'}$. (1 Punkt)

   c) Zeige, dass in der *Langwellennäherung* $\lambda = \frac{2\pi}{k} \gg R_0$ (was bedeutet das?) der führende Term (*elektrische Dipolstrahlung*, E1) lautet: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr}\int d^3r' \vec{j}(\vec{r}')$. (1 Punkt)

   d) Zeige mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung, dass $\vec{A}(\vec{r}) = -ik\frac{e^{ikr}}{r}\vec{p}$ mit dem Dipolmoment $\vec{p} = \int d^3r \varrho(\vec{r})\vec{r}$. Welche Art von Welle beschreibt $\vec{A}(\vec{r})$? (2 Punkte)

   e) Zeige mit der zusätzlichen Annahme $r \gg \lambda$, dass $\vec{B}(\vec{r},t) = k^2\mathrm{Re}(\vec{e}_r \times \vec{p}\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r})$ und $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r},t) \times \vec{e}_r$. Wie liegen die Felder relativ zur Wellenausbreitung? (3 Punkte)

Magnetische Dipolstrahlung

f) Zeige für den nächsten Term in H1.c): $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_{\mathrm{E1}} - i\frac{k}{c}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\vec{j}(\vec{r}')(\vec{e}_r\cdot\vec{r}')$. (1 Punkt)

g) Zeige $\vec{j}(\vec{e}_r\cdot\vec{r}') = \frac{1}{2}((\vec{e}_r\cdot\vec{r}')\vec{j} + (\vec{e}_r\cdot\vec{j})\vec{r}') + \frac{1}{2}(\vec{r}'\times\vec{j})\times\vec{e}_r$. Der letzte, in $\vec{j}$ und $\vec{r}'$ antisymmetrische Term liefert die *magnetische Dipolstrahlung*, die anderen beiden, als Summe symmetrisch, die *elektrische Quadrupolstrahlung*. (2 Punkte)

2. *Hertzscher Dipol* (17 Punkte)

Ein geladenes Teilchen bewege sich auf einer Bahnkurve $x(\sigma) \in \mathbb{R}^{1,3}$. Das von dieser bewegten Ladung erzeugte elektromagnetische Feld wird dann beschrieben durch den elektromagnetischen Feldstärketensor mit Komponenten

$$F^{\mu\nu} = \frac{q}{\langle k(\sigma_r), x'\rangle^3}(k^\mu(\sigma_r)w^\nu(\sigma_r) - k^\nu(\sigma_r)w^\mu(\sigma_r)), \tag{3}$$

wobei $k(\sigma_r) = x - x(\sigma_r)$ und $w(\sigma_r) = u(\sigma_r) + v(\sigma_r)$ mit

$$\begin{aligned} u(\sigma_r) &= \langle x'(\sigma_r), x'(\sigma_r)\rangle x'(\sigma_r), \\ v(\sigma_r) &= \langle k(\sigma_r), x'(\sigma_r)\rangle x''(\sigma_r) - \langle k(\sigma_r), x''(\sigma_r)\rangle x'(\sigma_r) \end{aligned} \tag{4}$$

ist und $x'(\sigma_r) = \frac{dx}{d\sigma}$ und $\sigma_r(x)$ durch die Gleichung $k^0(\sigma_r) = |\vec{k}(\sigma_r)|$ bestimmt wird. Wir wählen jetzt ein spezielles Bezugssystem und die Parametrisierung $\sigma = ct'$ und schreiben $x(\sigma) = (ct', \vec{x}(t'))$.

a) Zeige, dass in diesem Bezugssystem das elektrische und das magnetische Feld durch

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x},t) &= \frac{q}{(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^3}\left(\frac{1-|\beta|^2}{R^2}(\vec{n}-\vec{\beta}) + \frac{1}{cR}\left[\vec{n}\times\left[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right]\right]\right), \\ \vec{B}(\vec{x},t) &= \vec{n}\times\vec{E}(\vec{x},t) \end{aligned} \tag{5}$$

gegeben sind. Hierbei werden die folgenden Abkürzungen benutzt

$$\begin{aligned} &\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}(t_r), \quad R = |\vec{y}|, \quad \vec{n} = \frac{\vec{y}}{R}, \\ &\vec{\beta} = \frac{1}{c}\frac{d\vec{x}}{dt'}(t'_r), \quad \dot{\vec{\beta}} = \frac{1}{c}\frac{d^2\vec{x}}{dt'^2}(t'_r), \end{aligned} \tag{6}$$

und es gilt

$$t'_r = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}(t'_r)|}{c}. \tag{7}$$

(6 Punkte)

b) Berechne das elektrische Feld $\vec{E}_1$ für eine Punktladung, die eine harmonische Schwingung durchführt

$$\vec{x}_1(t') = \frac{1}{2}\vec{a}\sin(\omega t'), \quad a \in \mathbb{R}^3 = \text{const.}, \tag{8}$$

unter der Annahme, dass die Amplitude der Schwingung klein gegenüber $\frac{c}{\omega}$ ist, d.h. für die Geschwindigkeit gilt $|\vec{\beta}_1| \leq \frac{|\vec{a}|\omega}{2c} \ll 1$. Weil $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ die Wellenlänge der erzeugten Strahlung im Fernbereich ist, heißt diese nichtrelativistische Näherung auch Langwellennäherung. (2 Punkte)

c) Zeige, dass in der Langwellennäherung das elektrische Feld erzeugt wird von zwei entgegengesetzten, harmonisch schwingenden Ladungen

$$\begin{aligned} q_1 = q \quad &\text{mit Bahnkurve} \quad \vec{x}_1(t') = \frac{1}{2}\vec{a}\sin(\omega t'), \\ q_2 = -q \quad &\text{mit Bahnkurve} \quad \vec{x}_2(t') = -\frac{1}{2}\vec{a}\sin(\omega t') \end{aligned} \tag{9}$$

in der sog. Nahzone, d.h. für $|\vec{a}| \ll |\vec{x}| \ll \lambda$ durch

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \frac{1}{|\vec{x}|^3}\left(3\left(\vec{n}\cdot\vec{d}\left(t-\frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)\vec{n} - \vec{d}\left(t-\frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \tag{10}$$

und in der Fernzone, d.h. für $|\vec{a}| \ll \lambda \ll |\vec{x}|$, durch

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \frac{1}{|\vec{x}|c^2}\left[\vec{n}\times\left[\vec{n}\times\ddot{\vec{d}}\left(t-\frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right]\right], \tag{11}$$

gegeben ist, wobei $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ und $\vec{d}(t') = \vec{d}_0\sin(\omega' t) = q\vec{a}\sin(\omega t')$ das zeitabhängige Dipolmoment der Ladungsverteilung ist.

Hinweis: Benutze die Entwicklungen:

$$\begin{aligned} \vec{n}_{1/2} = (\vec{x}-\vec{x}_{1/2})/\left|\vec{x}-\vec{x}_{1/2}\right| &\approx \vec{n} \pm \frac{1}{2}[\vec{n}\times[\vec{n}\times\vec{a}/|\vec{x}|]]\sin(\omega(t-|\vec{x}|/c)), \\ \frac{1}{R_{1/2}^2} = 1/|\vec{x}-\vec{x}_{1/2}|^2 &\approx \frac{1}{|\vec{x}^2|}\left(1 \pm \frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{x}|}\sin(\omega(t-|\vec{x}|/c))\right), \\ \frac{1}{cR_{1/2}} = 1/c|\vec{x}-\vec{x}_{1/2}| &\approx \frac{1}{c|\vec{x}|}\left(1 \pm \frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{2|\vec{x}|}\sin(\omega(t-|\vec{x}|/c))\right). \end{aligned} \tag{12}$$

(3 Punkte)

d) Überprüfe, dass für große Entfernungen das elektromagnetische Feld alle Eigenschaften einer auslaufenden Kugelwelle besitzt, d.h.

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x},t) = \frac{1}{|\vec{x}|}\vec{E}_0\sin(\omega t - k|\vec{x}|), \quad k = \frac{\omega}{c}, \vec{E}_0 \in \mathbb{R}^3 = \text{const.}, \\ \vec{E}\perp\vec{x}, \vec{B}\perp\vec{x}, \vec{E}\perp\vec{B}, |\vec{E}| = |\vec{B}|. \end{aligned} \tag{13}$$

(2 Punkte)

e) Zeige, dass der Poyntingvektor für große $|\vec{x}|$ gegeben ist durch

$$\vec{S}(\vec{x},t) = \frac{\left|\ddot{\vec{d}}(t-\frac{|\vec{x}|}{c})\times\vec{n}\right|^2}{4\pi c^3|\vec{x}|^2}\vec{n} \tag{14}$$

(2 Punkte)

f) Die Energie $\mathcal{E}$ der Strahlung, die gemittelt über eine Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ durch die Oberfläche F_K einer Kugel mit Radius $R \gg |\vec{a}|$ fließt, ist gegeben durch das Flächenintegral

$$\frac{1}{T}\int_0^T dt \int_{F_K}\left(d\vec{f}\cdot\vec{S}(\vec{x},t)\right), \tag{15}$$

was in Kugelkoordinaten berechnet wird. Zeige, daß

$$\mathcal{E} = \frac{2}{3c^3T}\int_0^T dt\left|\ddot{\vec{d}}\left(t-\frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right|^2. \tag{16}$$

Berechne $\mathcal{E}$ für $\vec{d}\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right) = \vec{d_0}\sin(\omega(t - \frac{|\vec{x}|}{c}))$

$$\mathcal{E} = \frac{16\pi^4 c}{3\lambda^4}|\vec{d_0}|^2. \tag{17}$$

(2 Punkte)