Übungen Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm

Quickies

1. Betrachte zwei Matrizen A, B mit den Eigenschaften $A^T = A$, $B^T = -B$. Zeige $\mathrm{tr}(AB) = 0$ und schreibe dies in Indexschreibweise aus. Wie verallgemeinert sich dies zu höheren Tensoren[1]?

2. Was ist das elektrische Feld und Potential einer Punktladung?

3. Wie läßt sich $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}$ mittels Kroneckerdelta δ_{ab} umschreiben?

4. Was ist das Coulomb Gesetz in differentieller und integraler Form? Zeige deren Äquivalenz mittels des Satzes von Gauss.

Anwesenheitsaufgaben

1. *Rechnen mit der Deltadistribution*
   Formal ist die Diracsche Deltadistribution δ_a als Abbildung von einem Funktionenraum $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{C}$ definiert mit $\delta_a[f] = f(a)$ für beliebige Testfunktionen f. Es ist gebräuchlich in der Physik, dies formal mittels einer differenzierbaren "Funktion" $\delta(x-a)$ auszudrücken als

$$\delta_a[f] = f(a) =: \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,. \tag{1}$$

   Bedenke, dass $\delta(x-a)$ nur in Integralen definiert ist und dementsprechend alle Eigenschaften immer in Integralen zu zeigen sind. Dennoch ist es üblich, Aussagen direkt mittels $\delta(x-a)$ ohne Integral zu formulieren.

   a) Zeige, dass der Integrationsbereich in (1) auch $[a-\epsilon, a+\epsilon]$ für $\epsilon > 0$ sein kann. Wähle die Testfunktion $f = 1$. Welche Eigenschaft erfüllt $\delta(x-a)$ dann?

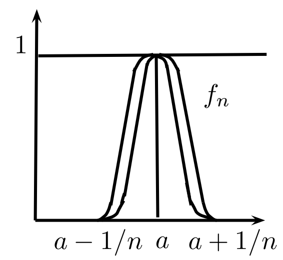

Abbildung 1: Die Funktionenfolge f_n

   b) Wähle die Nullfolge f_n aus Abb. 1 um mittels einer Abschätzung des Integrals (1) zu zeigen, dass $\delta(x-a)$ keine Funktion ist.

[1] Tensoren werden im Verlauf der Vorlesung noch eine entscheidende Rolle spielen. Bis wir eine genaue Definition geben, ist ein Tensor ein Objekt mit k Indizes

c) Verwende partielle Integration um zu zeigen[2], dass

$$\delta_a^{(n)}[f] = (-1)^n f^{(n)}(a) =: \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x-a)\,. \tag{2}$$

Wie oft ist $\delta(x-a)$ daher differenzierbar? Begründe die Schreibweise $\delta_a^{(n)} = (-)^n \delta_a \frac{d^n}{dx^n}$.

d) Zeige $x\delta(x) = 0$, $-x\delta'(x) = \delta(x)$ und $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$.

e) Berechne $\delta(x^2 - a^2)$ und zeige, dass

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x)|} \quad \text{mit } g(x_i) = 0\,. \tag{3}$$

2. *Mehrdimensionale Deltadistribution in der Elektrodynamik*
Definiere die drei-dimensionale Deltadistribution $\delta_{\vec{a}}$ als

$$\delta_{\vec{a}}[f] = \int_V f(\vec{r}')\delta(\vec{r}' - \vec{a})d^3r = \begin{cases} f(\vec{a}), & \vec{a} \in V \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4}$$

a) Stelle $\delta(\vec{r} - \vec{a})$ in kartesischen Koordinaten, Kugel- und Zylinderkoordinaten dar.

b) Was ist die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ von N Punktladungen bei $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N$?

c) Nutze die Deltadistribution in Kugelkoordinaten um die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ einer homogen geladenen Kugelschale vom Radius R mit Ladung Q anzugeben.

d) Was ist $\rho(\vec{r})$ einer homogen gelandene Zylinderfläche vom Radius R.

e) Bestimme die Ladungsverteilung eines homogen geladenen Diskus vom Radius R von zu vernachlässigender Dicke in Zylinder wie auch Kugelkoordinaten.

3. *Greenscher Satz*
Seien Φ und Ψ differenzierbare skalare Felder, V ein abgeschlossenes Volumen mit Oberfläche ∂V und $\partial_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \nabla$ die Richtungsableitung bzgl. der Oberflächennormale.

a) Zeige mit dem Satz von Gauss die Greensche Identität:

$$\int_V (\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi + \Phi\Delta\Psi)d^3r = \int_{\partial V} \Phi\partial_{\vec{n}}\Psi d^2r \tag{5}$$

b) Beweise damit den Greenschen Satz

$$\int_V (\Phi\Delta\Psi - \Psi\Delta\Phi)d^3r = \int_{\partial V} (\Phi\partial_{\vec{n}}\Psi - \Psi\partial_{\vec{n}}\Phi)d^2r. \tag{6}$$

Hausaufgaben (35 Punkte)

1. *Darstellungen der Deltadistribution* (10 Punkte)
Die Deltadistribution läßt sich zum einen darstellen als Ableitung von Funktionen, zum anderen als Limes stetiger Funktionenfolgen.

a) Zeige, dass $\delta(x-a) = \frac{d}{dx}\theta(x-a)$. (2 Punkte)

b) Beweise, dass

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \frac{n}{1 + n^2x^2} = \lim_{\eta\to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{\eta^2 + x^2}\,.$$

Spalte hierzu das Integral (1) in drei Integrale $[-\infty, -\epsilon]$, $[-\epsilon, \epsilon]$ und $[\epsilon, \infty]$ auf.

(4 Punkte)

[2] Beachte, dass hier $\delta^{(n)}$ die n-te Ableitung der Deltadistribution bezeichnet. Später schreibt man oft auch $\delta^{(n)}$ um die n-dimensionale Deltadistribution zu notieren.

c) Zeige ebenso, dass gilt

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} n e^{-\pi x^2 n^2}\,, \quad \delta(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi}\left(\frac{\sin(nx)}{nx}\right)^2, \\ \delta(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{ikx} dk. \tag{7}$$

(4 Punkte)

2. *Greensfunktionen in $d = 1, 2, 3$ Dimensionen (10 Punkte)*

Die Greensche Funktion G zum Operator $\hat{A}$ wird eingeführt als dessen Operatorinverses, d. h. als Lösung der Gleichung

$$\hat{A}G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')\,. \tag{8}$$

Mittels G läßt sich die Lösung der inhomogenen Gleichung $\hat{A}\Phi(\vec{r}) = f(\vec{r})$ für beliebiges f bestimmen. In der Elektrostatik identifizieren wir den Laplace-Operator $\Delta \equiv \hat{A}$ und die Ladungsdichte $-\frac{1}{\epsilon_0}\rho \equiv f$, welche durch die Poisson-Gleichung das elektrische Potential $\Phi(\vec{r})$ bestimmten. Viele physikalische Probleme in drei Dimensionen reduzieren sich auf niedriger dimensionale Probleme, weswegen die Kenntnis der Greensfunktion G in $d = 1, 2$ hilfreich ist.

a) Zeige, dass die Greensfunktion zur Laplace-Gleichung in drei Dimensionen ($d = 3$) gegeben ist durch $G(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi r}$. Verfiziere hierzu

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}) \tag{9}$$

durch

- Auswertung von (9) im Integral mit einer beliebigen Testfunktion $f(\vec{r})$.
- Wahl der Testfunktion $f = 1$ und Kenntnis der Anwesenheitsaufgabe 1a).

Was ist die Asymptopik für $r \to \infty$? Ist $G(\vec{r})$ eindeutig? (6 Punkte)

b) Bestimme die Greensche Funktion in $d = 2$ und $d = 1$. Verwende hierzu Polarkoordinaten in $d = 2$.

(4 Punkte)

Hinweis: Der Laplaceoperator lautet in Polarkoordinaten:

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

3. *Identitäten zwischen Differentialoperatoren (10 Punkte)*

In dieser Aufgabe sollen einige nützliche Identitäten zwischen Differentialoperatoren nachvollzogen werden. Seien $\vec{A}, \vec{B}$ Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$, f eine Funktion.
Zeige die folgenden Identitäten:

a) $\operatorname{grad}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{A}\wedge\operatorname{rot}\vec{B} + \vec{B}\wedge\operatorname{rot}\vec{A}$ (3 Punkt)

b) $\operatorname{rot}(f\vec{A}) = f\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\wedge\operatorname{grad} f$ (2 Punkt)

c) $\operatorname{rot}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + \vec{A}\operatorname{div}\vec{B} - \vec{B}\operatorname{div}\vec{A}$ (2 Punkt)

d) Sei nun $f(\vec{x}) = f(|\vec{x}|)$. Zeige:
$\operatorname{grad} f(|\vec{x}|) = f'(|\vec{x}|)\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$, $\Delta f(|\vec{x}|) = f''(\vec{x}) + \frac{2}{|\vec{x}|}f'(|\vec{x}|)$ (3 Punkte)

4. *Koordinatensysteme (5 Punkte)*

In dieser Aufgabe wollen wir Differential- und Integralrechnung mit Hilfe der gängigen Koordinatensystemen studieren. Dies ist oftmals angebracht, wenn ein physikalisches System

eine gewisse Symmetrie besitzt.
Der Transformationssatz der Integralrechnung besagt Folgendes: sei $\phi : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^d$ ein Diffeomorphismus, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes Gebiet und $f : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt

$$\int_{\phi(\mathcal{G})} f(y)\, d^d y = \int_{\mathcal{G}} f(\phi(x))\, |\det D\phi(x)|\; d^d x. \tag{10}$$

Mit $D\phi(x)$ bezeichnen wir die Jacobimatrix.

$$D\phi(x)^i{}_j = \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j} \tag{11}$$

a) Bestimme die Transformation des kartesischen Volumenelementes $d^3x = dx\, dy\, dz$ im $\mathbb{R}^3$ für Zylinderkoordinaten

$$(x, y, z)^T = (r\cos(\phi), r\sin(\phi), z)^T$$

und für Kugelkoordinaten

$$(x, y, z)^T = (r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\theta))^T.$$

Gib ferner an welche Werte (r, θ, z) und (r, θ, ϕ) annehmen.