Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übung 3
30. Oktober 2009
WS09/10

Übungen Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm

Quickies

1. Wie lautet die definierende Eigenschaft der Deltadistribution?
2. Was gilt für $\delta(g(x))$ wobei $g(x)$ eine Funktion mit einfachen Nullstellen ist? Folgere so die Formeln für $\delta(ax), a \in \mathbb{R}$ und $\delta(x^3 - x)$.
3. Wie lautet der Greensche Satz?
4. Was versteht man unter der Greensfunktion?
5. Wie transformiert sich das kartesische Integrationsmaß beim Wechsel zu Kugel- bzw. Zylinderkoordinaten?

Anwesenheitsaufgaben

1. *Ladung vor Metallwand*
   Eine Möglichkeit der Lösung der Poissongleichung mit vorgegebenen Randbedingungen für ein Volumen V besteht darin, ausserhalb von V an von der Geometrie des Problems abhängenden Stellen fiktive (Spiegel-) Ladungen anzubringen, durch welche die geforderten Randbedingungen erzeugt werden. Betrachte dazu folgendes Beispiel:
   Eine Punktladung Q sei am Orte $\vec{r}_Q = (0, 0, a)$ und eine unendlich grosse geerdete Metallplatte in der xy-Ebene, auf der das elektrostatische Potential $\Phi = 0$ sein soll.
   a) Zeige, dass folgendes Potential die Poissongleichung in dem Halbraum löst, in der sich die Ladung befindet, und für $\vec{r}$ auf der Platte die Randbedingung $\Phi = 0$ erüllt:
   $$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} - \frac{Q}{|\vec{r} + \vec{r}_Q|}. \tag{1}$$
   b) Wie sieht das Potential im anderen Halbraum aus?
   c) Wie kann man das Zustandekommen des Potentials anschaulich interpretieren?
   d) Zeige, dass die Oberfächenladungsverteilung aufgrund von Influenz auf der Platte durch den Sprung des elektrischen Feldes gemäss $\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Phi}{\partial z}|_{z=0}$ gegeben ist.
   e) Skizziere die Feldlinien und $\sigma(x, y)$. Welche Symmetrie gibt es ?
   f) Berechne die totale Influenzladung $Q_{\text{inf}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x, y) dxdy$.
   g) Welche Kraft wird auf Q ausgeübt? Was passiert für eine nicht geerdete Platte?

2. *Geladene Walze und geladenes Rohr*
   Ein unendlich langer Vollzylinder mit Radius a ist gleichförmig elektrisch geladen.
   a) Berechne durch Lösen der Poissongleichung und mit Hilfe von Symmetrieargumenten das elektrische Potential im Innen- und Aussenraum. Warum darf das Potential im Inneren der Walze keine Singularitäten haben?
   b) Potential und Feld müssen auf der Oberfläche stetig sein. Benutze diese Bedingungen, um die noch freien Konstanten festzulegen. Skizziere das Potential.

Betrachte einen gleichförmig geladenen, unendlich langen Hohlzylinder mit Radius a.

a) Berechne durch Lösen der Poissongleichung und mit Hilfe von Symmetrieargumenten das elektrische Potential im Innen- und Aussenraum. Warum darf das Potential im Inneren des Rohrs keine Singularitäten haben?
b) Das Potential muss auf der Oberfläche stetig sein. Lege damit die noch freien Konstanten fest. Skizziere das Potential und vergleiche mit dem vorherigen Beispiel.
c) Wie verhählt sich das Feld an der Rohrwand?

Hinweis: In Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) gilt

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2}$$

Hausaufgaben (37 (42) Punkte)

1. *Ladungsverteilung im Wasserstoffatom* *(10 Punkte)*
Das mittlere elektrische Potential eines Waserstoff Atoms ist gegeben als

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{e}{r}\left(1 + \frac{r}{a_0}\right)\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right). \tag{3}$$

Hierbei bezeichnet e die Elektronladung und a_0 den Bohrschen Radius. Bestimme die Ladungsverteilung und interpretiere das Resultat!

2. *Das elektrische Feld an Grenzflächen* *(10 Punkte)*
Definiere eine Oberflächenladungsdichte σ mit Hilfe der schon bekannten Volumenladungsdichte lokal durch $\varrho(\vec{r}) = \delta(z)\sigma(x, y)$. Sei nun S eine Oberfläche mit Normalenrichtung $\vec{n}$ und Oberflächenladungsdichte σ.

   a) Zeige, dass für die elektrischen Felder $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ auf den beiden Seiten der Oberfläche gilt
   $$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\cdot\vec{n} = +4\pi\sigma\,. \tag{4}$$
   Wie läßt sich dies mittels Φ ausdrücken? (4 Punkte)
   b) Begründe unter der Voraussetzung $\vec{E} = -\nabla\Phi$, dass sich die Tangentialkomponenten von $\vec{E}$ stetig verhalten. (2 Punkte)
   c) Berechne die Oberflächenladungsdichte für
   $$\Phi = \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dx'^3\,. \tag{5}$$
   (4 Punkte)

3. *Differentialoperatoren in unterschiedlichen Koordinatensystemen* *(10 Punkte)*
In dieser Aufgaben wollen wir studieren, wie sich die bekannten Differentialoperatoren unter Koordinatentransformation verhalten.
Der Nablaoperator ∇ ist in kartesischen Koordinaten x^i gegeben durch

$$\nabla = \vec{e}^{\,x}_i\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{6}$$

Dieser Ausdruck soll unabhängig von der gewählten Basis sein. Somit gilt in einem anderen Koordinatensystem y:

$$\nabla = \vec{e}^{\,y}_i f_i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \tag{7}$$

hierbei bezeichnen $f_i(y)$ Funktionen, die durch den Koordinatenwechsel von x nach y entstehen und $\vec{e}^{\,y}_i$ bezeichnen die Basisvektoren in den Koordinaten y.
Berechnen wir nun den Gradient einer Funktion $F(y(x))$ in den Koordinaten y[1], so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \nabla F(y(x)) &= \vec{e}^{\,x}_i \partial^x_i F(y(x)) \\ &= \vec{e}^{\,x}_i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \partial^y_j F(y(x)) \\ &\equiv \vec{e}^{\,y}_i f_i(y) \partial^y_i F(y) \end{aligned} \tag{8}$$

Hierbei ist $\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$ die Komponenten der Jacobimatrix $D_x y(x)$. Somit lassen sich aus Gleichung (8) die Funktionen f_i ablesen. Um nun die Jacobimatrix $D_x y$ auszurechnen benutzt man:

$$D_x y = (D_y x)^{-1} \tag{9}$$

a) Berechne folgende Operatoren in Zylinder- und Kugelkoordinaten:
   - grad
   - div

   (5 Punkte)

b) *[2] Um die bekannten Differentialoperatoren in unterschiedlichen Koordinatensystemen auszudrücken, kann man einen geschlossenen Ausdruck angeben. Hierzu führt man den sogenannten metrischen Tensor $\mathbf{g} = (g_{ij}), i, j = 1, \ldots, n)$, kurz Metrik, ein. Er kann mit Hilfe der Jacobimatrix $\mathbf{D_x y} = (D_x y^i{}_j)$ bestimmt werden via :

   $$\mathbf{g} = \mathbf{D_x y}^T \, \mathbf{D_x y} \tag{10}$$

   Insbesondere bezeichnen wir mit g^{ij} die inverse Matrix zu g_{ij}, d.h. $g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$ und $g = \det \mathbf{g}$. Dann gilt:
   - $\operatorname{grad}^i = g^{ij} \partial_j$
   - $\operatorname{div} A = \sum_i \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} A^i \right)$

   Verifiziere mit Hilfe dieser Gleichungen die obigen Resultate. (5 Punkte)

4. *Greensfunktion mit Dirichlet-Randbedingungen* *(12 Punkte)*
Betrachte den drei-dimensionalen Raum mit einer entlang der $x-y$-Ebene leitenden Wand, die sich entlang der negativen z-Achse unendlich weit ausdehnt.

a) Wie lautet die Greensfunktion $G(\vec{x}, \vec{x}')$? Erläutere ihre Form physikalisch. (2 Punkte)

b) Wie lautet das Integral, mittels dessen sich das allgemeine Potential Φ, wenn Φ auf $z = 0$ vorgegeben wird? (2 Punkte)

c) Wie läßt sich Φ prinzipiell berechnen, für den Fall, dass

   $$\Phi(x, y, 0) = V\theta(a - r_\perp)\,, \quad r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{11}$$

   gilt? Welche Koordinaten eignen sich für dieses Problem? Drücke das Integral in diesen Koordinaten aus. (2 Punkte)

d) Zeige, dass Φ entlang der z-Achse die folgende Form hat

   $$\Phi = V \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) . \tag{12}$$

   (2 Punkte)

[1]Beachte, dass die neuen Koordinaten y als Funktion der alten Koordinaten x aufgefasst werden können
[2]Zusatzaufgabe

e) Zeige, dass für große Entfernungen $r >> a^2$) die Potenzreihenentwicklung in r^{-1} sinnvoll ist und die führenden Terme gegeben sind durch

$$\Phi = \frac{Va^2}{2} \frac{z}{(r_\perp^2 + z^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{3a^2}{4(r_\perp^2 + z^2)} + \frac{5a^2(3r_\perp^2 + a^2)}{8(r_\perp^2 + z^2)^2} + \dots \right] . \tag{13}$$

(3 Punkte)

f) Prüfe die Konsistenz der Potentiale aus (12) und (13). (1 Punkt)