Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übung 4
6. November 2009
WS09/10

Übungen Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm

Quickies

1. Wie lautet der Gradient in Kugel- und Zylinderkoordinaten?
2. Leite aus dem Coloumb-Gesetz die Bestimmungsgleichung für das Potential her bei gegebener Ladungsdichte ρ.
3. Welche Greensfunktionen mit Randbedingungen gibt es? Wie läßt sich das Potential dann bestimmen?
4. Wie läßt sich die Oberflächenladungsdichte σ durch das Potential ausdrücken für eine Platte in der x-y-Ebene?

Anwesenheitsaufgaben

1. *Elektrische Feldenergie*

   a) Zeige, dass die Energie des elektrischen Feldes einer Ladungsverteilung ϱ lautet

   $$W = \frac{1}{2} \int \int \frac{\varrho(\vec{r})\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r d^3r' = \frac{1}{2} \int \varrho(\vec{r})\Phi(\vec{r}) d^3r = \frac{1}{8\pi} \int |\vec{E}(\vec{r})|^2 d^3r. \qquad (1)$$

   b) Diskutiere den Fall, dass ϱ aus zwei Ladungswolken besteht, von denen die eine positive und die andere negative Gesamtladung trägt. Welches Problem tritt auf?

2. *Die Kapazität*

   Ein Volumen V wird von einer Fläche S begrenzt, die aus mehreren, auf den Potentialen Φ_i gehaltenen, separaten leitenden Teilflächen S_i besteht, von denen sich evtl. eine im Unendlichen befindet. Die Kapazitäten C_{ij} sind über $Q_i = \sum_j C_{ij}\Phi_j$ definiert, wobei Q_i die gesamte auf der Fläche S_i befindliche Ladung bezeichnet.

   a) Zeige $C_{11} = \frac{1}{4\pi} \int_V |\nabla\Phi|^2 d^3r$, wobei Φ die Lösung der Poissongleichung in V zu den gegebenen Randwerten ist. Berechne so die Kapazität einer Kugel.

   b) Beweise den Satz "$\Delta\Phi = 0 \Leftrightarrow \int_V |\nabla\Phi|^2 d^3r = \min!$" und folgere, dass die Kapazität durch $C_{11}[\Psi] = \frac{1}{4\pi} \int_V |\nabla\Psi|^2 d^3r$ nach oben beschränkt wird. Dabei ist Ψ eine beliebige Funktion, die den Randbedingungen genügt. So findet man obebere Schranken für die Kapazität, ohne das elektrostatische Problem lösen zu müssen.

   c) Zeige $W = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij}\Phi_i\Phi_j$. Bestätige dies für einen Plattenkondensator explizit.

Hausaufgaben (32 Punkte)

1. *Laplace-Operator und Rotation* *(9 Punkte)*

   a) Verwende die Darstellung des Nabla-Operators ∇ in Kugel- und Zylinderkoordinaten aus Aufgabe H.3.3 a) um den Laplace-Operator $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ in diesen Koordinaten auszurechnen. Achte hierbei darauf, dass die Basisvektoren e_r, e_ϕ, e_θ als auch e_r, e_ϕ, e_z von den Koordinaten nicht-trivial abhängen und daher die Komponenten von ∇ auch auf diese wirken. (4 Punkte)

   b) Berechne die Rotation $\mathrm{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$ in Kugel- wie Zylinderkoordinaten. (5 Punkte)

2. *Legendre-Polynome* *(10 Punkte)*

   Setzt man für die Lösung der Laplacegleichung $\Delta\Phi = 0$ in Kugelkoordinaten den sogenannten Sepratationsansatz an als

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi)\,, \tag{2}$$

   so läßt sich die partielle Differentialgleichung zweiter Ordung $\Delta\Phi = 0$ reduzieren auf drei gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung für U, P und Q.

   a) Zeige, dass die Funktionen Q, P und U folgende Gleichungen erfüllen

$$Q''(\varphi) = -m^2 Q(\varphi)\,, \qquad U''(r) = \tfrac{l(l+1)}{r^2} U(r)\,,$$
$$\tfrac{d}{dx}\left((1-x^2)\tfrac{d}{dx}P(x)\right) + \left(l(l+1) - \tfrac{m^2}{1-x^2}\right) P(x) = 0\,, \tag{$\star$}$$

   wobei $x = \cos(\theta)$ gesetzt wurde und die Konstanten $m, l \in \mathbb{R}$. Die Differentialgleichung für P wird auch *verallgemeinerte Legendregleichung* genannt. (2 Punkte)

   b) Warum gilt $m \in \mathbb{Z}$? Wieso beschreibt $m = 0$ ein zylindersymmetrisches Problem, d.h. ein Problem mit Azimutalsymmetrie? Schreibe $(\star)$ dafür als *Legendregleichung*

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}P_l(x)\right) + l(l+1)P_l(x) = 0\,. \tag{3}$$

   (1 Punkte)

   Da diese Gleichung zweiter Ordnung ist, gibt es für jedes l zwei linear unabhängige, i.a. für $x \to \pm 1$ divergente Lösungen $P_l(x)$ und $\tilde{P}_l(x)$. $P_l(\pm 1)$ bleibt allerdings für $l \in \mathbb{N}$ endlich, da P_l dann einfache Polynome vom Grad l sind. Diese durch $P_l(1) = 1$ normierte polynomiale Lösung heisst *l-tes Legendre-Polynome* $P_l(x)$.

   c) Benutze die Formel von Rodrigues (Olinde Rodrigues, 1794-1851)

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l\,, \tag{4}$$

   um die Orthogonalität der Polynome in $L^2([-1,1])$ zu zeigen:

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}\,. \tag{5}$$

   (3 Punkte)

   d) Gib $P_l, l \leq 2$ explizit an. Wie wirkt allgemein die Parität, d.h. was ist $P_l(-x)$? (2 Punkte)

   e) Folgere aus der Formel von Rodrigues die Identität

$$P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) = (2l+1)P_l(x)\,. \tag{6}$$

   (2 Punkte)

3. *Azimutalsymmetrie der Ladungsverteilungen* *(5 Punkte)*

Bei einer um die z-Achse rotationssymmetrischen Ladungsverteilung kann das Potential wie folgt nach Legendre-Polynomen entwickelt werden

$$\Phi(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(cos\vartheta). \tag{7}$$

a) Begründe diesen Ansatz und insbesondere die Exponenten l und $-(l+1)$ von r. (2 Punkte)

b) Zeige: ist das Potential bei einem um die z-Achse rotationssymmetrischen Problem auf der z-Achse bekannt ($\Phi(r=z) = \Phi(r,0)$), so ist auch $\Phi(r,\vartheta)$ bekannt. (1 Punkte)

c) In der xy-Ebene befindet sich ein Ring mit Radius R und Mittelpunkt auf der z-Achse, der eine Ladung Q trägt. Bestimmt zuerst $\Phi(r=z)$ und dann $\Phi(r,\vartheta)$. (2 Punkte)

4. *Vollständigkeit der Legendre-Polynome* *(3 Punkte)*

Die $P_l(x)$ bilden sogar ein vollständiges System (Hilbertbasis) in $L^2([-1,1])$, denn die $P_l, l \leq n$ entstehen durch Orthogonalisierung aus $x^l, l \leq n$. Vollziehe dies durch Anwenden des Gram/Schmidt-Verfahrens auf $\{1, x, x^2\}$ nach und vergleiche das Ergebnis mit den normierten Legendre-Polynomen. Zur Erinnerung: Mit der Vorschrift

$$\vec{v}_i = \frac{1}{||\cdot||}(\vec{w}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\vec{w}_i \cdot \vec{v}_j)\vec{v}_j) \tag{8}$$

wird aus linear unabhängigen Vektoren $\{\vec{w}_i\}$ ein Orthonormalsystem $\{\vec{v}_i\}$ erzeugt.

5. *Entwicklung in Legendre-Polynome und Rekursion* *(5 Punkte)*

a) Beweise unter Verwendung von H4.2 die Formel

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\alpha)\,, \tag{9}$$

wobei α der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{r}'$, $r_< = \min(|\vec{r}|, |\vec{r}'|)$, $r_> = \max(|\vec{r}|, |\vec{r}'|)$. (2 Punkte)

b) Zeige: $P'_{l+1} - xP'_l - (l+1)P_l = 0$ und $(x^2-1)P'_l - lxP_l + lP_{l-1} = 0$. Folgere daraus die berühmte Rekursionsformel $(l+1)P_{l+1} = (2l+1)xP_l - lP_{l-1}$. (3 Punkte)