Übungen Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm

Quickies

1. Wie lautet die elektrische Feldenergie? Welches Problem tritt hierbei auf und wodurch wird es gelöst?

2. Was ist ein Separationsansatz? Formuliere ihn in kartesischen Koordinaten, Kugel- und Zylinderkoordinaten.

3. Wie läßt sich mit Hilfe der Greensfunktion die Lösung der Poisson-Gleichung bestimmen? Wie eindeutig ist die Lösung? Welche Randbedingungen kann es geben?

4. Wie lauten die Orthonormalitäts- und Vollständigkeitsrelation eines vollständigen Funktionensystems $u_n(x)$? Wie läßt sich dann eine beliebige Funktion $f(x)$ entwickeln?

5. Wie läßt sich die Greensfunktion zur Laplace-Gleichung in $d = 3$ mittels der Legendre-Polynome darstellen? Wie läßt sich daher das Potential einer azimutalsymmetrischen Ladungsverteilung entwickeln?

Anwesenheitsaufgaben

1. *Drehimpuls und Kugelflächenfunktionen - Teil I*

   a) Die Drehimpulse L_i sollen per Poissonklammer $\{L_i, f(\vec{x})\}$ auf Funktionen wirken. Zeige, dass $\{L_i, f(\vec{x})\} = (\vec{x} \wedge \nabla)_i\, f(\vec{x})$ und berechne $\vec{L}$ sowie $\vec{x} \wedge \nabla$ in Kugelkoordinaten. Zeige damit, dass Y_{lm} Eigenfunktion von L_z mit Eigenwert im ist:

   $$\{L_z, Y_{lm}\} = imY_{lm}. \tag{1}$$

   b) Zeige: $(\vec{r} \wedge \nabla)^2$ ist der Winkelanteil des Laplaceoperators, multipliziert mit r^2, d.h.

   $$(\vec{r} \wedge \nabla)^2 = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \tag{2}$$

   c) Folgere aus dem Separationsansatz $\Phi(\vec{x}) \sim \frac{U(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi)$ aus Aufgabenblatt 4, H.2, dass Y_{lm} Eigenfunktionen von "L^2" mit Eigenwert $-l(l + 1)$ ist, genauer:

   $$\sum_{i=1}^{3} \{L_i, \{L_i, Y_{lm}\}\} = -l(l + 1)Y_{lm}. \tag{3}$$

   Warum sind die Kugelflächenfunktionen Y_{lm} daher auch Eigenfunktionen des Laplaceoperators? Was ist ihr Eigenwert? Weiterhin wird in den Hausaufgaben gezeigt, dass für $L_\pm := L_x \pm iL_y$ folgende Relationen gelten: $\{L_\pm, Y_{l,\pm l}\} = 0$ und $\{L_\pm, Y_{lm}\} \sim Y_{l,m\pm1}$. Daher nennt man die $L_\pm$ auch Leiteroperatoren.

Hausaufgaben **(34 (42) Punkte)**

1. *Definition und Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen* *(12 Punkte)*

   a) Zeige, dass die Funktion $P(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} H(x)$ die verallgemeinerte Legendregleichung erfüllt, wenn die Funktion $H(x)$ folgende Differentialgleichung löst:

   $$(1-x^2)H''(x) - 2x(m+1)H'(x) + (l(l+1) - m(m+1))H(x) = 0\,. \tag{4}$$

   Die beiden linear unabhängigen Lösungen der verallgemeinerten Legendregleichung sind i.a. für $x \to \pm 1$ divergent, und nur für $l \in \mathbb{N}$ und $|m| \leq l (m \in \mathbb{Z})$ bleibt eine davon endlich. Diese Lösung heisst *assoziierte Legendrefunktion* $P_l^m(x)$. (3 Punkte)

   b) Zeige mit (4), dass die verallgemeinerte Legendregleichung gelöst wird durch

   $$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)\,. \tag{5}$$

   (3 Punkte)

   c) Wie verändert $m \to -m$ die verallgemeinerte Legendregleichung? Definiere daher

   $$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)\,. \tag{6}$$

   (1 Punkt)

   d) Damit definiert man die Kugelflächenfunktionen als

   $$Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}\,. \tag{7}$$

   Gib $Y_{lm}, l \leq 2$, explizit an. Zeige für die Konjugation: $Y_{lm}^* = (-1)^m Y_{l,-m}$. (2 Punkte)

   e) Zeige das Verhalten unter der Parität:

   $$Y_{lm}(\pi-\theta, \pi+\phi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta,\phi), \quad \text{d.h.} \quad Y_{lm}(-\vec{e}_r) = (-1)^l Y_{lm}(\vec{e}_r)\,. \tag{8}$$

   (1 Punkt)

   f) Zeige, dass die allgemeine Lösung von $\Delta f = 0$ in Kugelkoordinaten lautet:

   $$f(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1}) Y_{lm}(\theta,\phi). \tag{9}$$

   (2 Punkte)

2. *Technisches zu den Kugelflächenfunktionen* *(10 Punkte)*

   a) Beweise folgende geschlossene Formel für die assoziierten Legendrefunktionen:

   $$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l. \tag{10}$$

   (3 Punkte)

   b) Zeige die Orthogonalität der assoziierten Legendrefunktionen bzgl. l:

   $$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'}. \tag{11}$$

   (3 Punkte)

c) Zeige, dass die Y_{lm} ein Orthonormalsystem von $L^2(S^2)$ bilden:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y^*_{lm'}(\theta,\phi) Y_{lm}(\theta,\phi) \sin\theta d\theta d\phi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{12}$$

(1 Punkt)

d) Die $Y_{lm}(\theta,\phi)$ sind sogar vollständig in $L^2(S^2)$, denn die $Y_{lm}, l \leq n$ mit $n \in \mathbb{N}$ beliebig, entstehen durch Orthogonalisierung aus den linear unabhängigen homogenen Polynomen $\hat{x}^a\hat{y}^b\hat{z}^c, a+b+c \leq n$, $(\hat{x}_i = \frac{x_i}{r})$. Rechne dies durch Anwenden des Gram/Schmidt-Verfahrens auf $\{1, \hat{x} \pm i\hat{y}, \hat{z}, \hat{z}^2, (\hat{x} \pm i\hat{y})\hat{z}, (\hat{x} \pm i\hat{y})^2\}$ nach. Warum sind es nur fünf Polynome zweiten Grades und nicht wie erwartet $(\hat{x}^2, \hat{y}^2, \hat{z}^2, \hat{x}\hat{y}, \hat{x}\hat{z}, \hat{y}\hat{z})$ sechs? (3 Punkte)

3. *Ladungsanordnungen ohne Axialsymmetrie* *(6 Punkte)*

a) Zeige mit Hilfe des *Additionstheorems*

$$P_l(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta',\phi') Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{13}$$

(α ist der Winkel zwischen den Einheitsvektoren $\vec{e}_r$,$\vec{e}_r'$, d. h. es gilt $\cos(\alpha) = \cos(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta)\sin(\theta')\cos(\phi-\phi')$), dass das durch eine beliebige Ladungsverteilung ρ am Ort $\vec{x}$ erzeugte Potential gegeben ist durch:

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi) \int_0^\infty r'^2 dr' \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \int\int d\Omega' Y^*_{lm}(\theta',\phi')\rho(\vec{x}'). \tag{14}$$

(2 Punkte)

b) Folgere daraus, dass für das Fernfeld einer Ladungsverteilung (d.h. wenn $r > r'$ bleibt) sich das Potential als

$$\Phi(\vec{x})|_{\text{aussen}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi) \frac{Q_{lm}}{r^{l+1}} \tag{15}$$

schreiben lässt, wobei die $Q_{lm} = \int_0^r r'^2 dr' r'^l \int\int d\Omega' Y^*_{lm}(\theta',\phi')\rho(\vec{r}')$ als Multipolmomente bezeichnet werden. (2 Punkte)

c) Welche Eigenschaft erben die Multipolmomente von den Kugelflächenfunktionen? Gib die Momente explizit für $l = 0$, $l = 1$ und $l = 2$ an. (2 Punkte)

4. *Kugelflächenfunktionen & Dirichlet-Randebedingungen auf der Kugel* *(8 Punkte)*

Betrachte eine Hohlkugel vom Radius a auf deren Oberfläche das Potential gegeben ist als $\Phi(a,\theta,\phi) = V(\theta,\phi)$. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die Lösungsmethod mit einer Greensfunktion mit Dirichlet-Randbedingung auf der Kugel äquivalent ist zur Lösung mittels Kugelflächenfunktionen.

a) Gib die Greensfunktion mit Dirichlet-Randbedingungen auf der Sphäre an und diskutiere ihre physikalische Interpretation. Wie lautet der Integralausdruck für das Potential Φ innerhalb der Kugel? (2 Punkte)

b) Löse dasselbe Problem mittels Entwicklung des Potentials in Kugelflächenfunktionen durch Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten A_l und B_l in Gleichung (9). (2 Punkte)

c) Zeige die Äquivalenz des Integralausdrucks aus Aufgabenteil a) und der Entwicklungsformel aus Aufgabenteil b).

(4 Punkte)

5. *Drehimpuls und Kugelflächenfunktionen - Teil II ** *8 Punkte*

Zeige folgende Relationen

$$\{L_\pm, Y_{l,\pm l}\} = 0\,, \quad \{L_\pm, Y_{lm}\} = C_{l,m} Y_{l,m\pm 1}\,,. \tag{16}$$

Berechne die Proportionalitätskonstante $C_{l,m}$. Berechne die Poisson-Klammer

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k. \tag{17}$$