Übungen Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm

Quickies

1. Wie hängen die Kugelflächenfunktionen mit den Legendrepolynomen zusammen? Wie verhalten sie sich unter Parität? Welche Eigenschaften haben die Kugelflächenfunktionen hinsichtlich $L^2(S^2)$?

2. Wie wirken die Drehimpulsoperatoren L_z und L^2 mit Hilfe von Poissonklammern auf die Kugelflächenfunktionen?

3. Wie lässt sich die Lösung der Laplacegleichung mit Hilfe der Kugelflächenfunktionen schreiben?

4. Was ist die Kontinuitätsgleichung? Was definiert Magnetostatik?

Anwesenheitsaufgaben

1. *Magnetostatik*
   Sei $\vec{j}$ ein stationärer Strom (die Felder können als zeitlich konstant angesehen werden).

   a) Wie lauten in diesem Fall die Maxwellgleichungen?

   b) Leite aus den Maxwellgleichungen eine Gleichung für $\vec{B}$ ab. Kommt Dir diese Gleichung bekannt vor? Erhalte so das Biot/Savartsche Gesetz.

   $$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \int d\vec{s}' \wedge \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \tag{1}$$

   c) Warum ist es immer möglich, $\vec{A}$ so umzueichen, dass div $\vec{A} = 0$ wird? Leite aus den Maxwellgleichungen eine Gleichung für $\vec{A}$ in dieser Eichung her:

   $$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \tag{2}$$

   d) Zeige für das Fernfeld einer Stromverteilung ($\vec{m}$ = magnetisches Dipolmoment):

   $$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3} + \cdots \quad \text{mit} \quad \vec{m} = \frac{1}{2c} \int \vec{r} \wedge \vec{j}(\vec{r}) d^3r. \tag{3}$$

   e) Leite aus (3) das zugehörige Magnetfeld ab.

Hausaufgaben **(30 (35) Punkte)**

1. *Verschiedene magnetostatische Konfigurationen* (9 Punkte)

   In dieser Aufgabe sollen einfach magnetostatische Konfigurationen diskutiert werden. Betrachte im Folgenden einen vom Strom I durchflossenen Kreisleiter vom Radius R in der x-y-Ebene.

   a) Wie lautet $\vec{j}$ in diesem Fall? Berechne das magnetische Moment des Kreisleiters. Verallgemeinere das Ergebnis auf beliebige ebene Leiterschleifen. Wie sieht das Ergebnis aus, wenn der Strom nur aus einem Teilchen besteht? (2 Punkte)

   b) Berechne mit dem Biot/Savartschen Gesetz das Magnetfeld auf der Symmetrieachse des Kreisleiters und vergleiche das Ergebnis mit dem Dipolfeld. (2 Punkte)

   c) Vergleiche die Felder eines elektrischen und magnetischen Dipols. Skizziere die Feldlinien des Kreisleiters und einer Punktladungskonfiguration $\pm Q$ an $(0, 0, \pm a)$. (1 Punkt)

   Betrachte nun eine starre Kugel vom Radius R, auf deren Oberfläche eine Ladung Q gleichförmig verteilt ist und welche mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiert.

   d) Berechne das magnetische Dipolmoment der Kugel. Zerlege dazu die Kugel in dünne Scheiben senkrecht zur Rotationsachse und benutze das Ergebnis aus (a). (2 Punkte)

   e)* Die Kugel sei das Modell eines klassischen Elektrons, d.h. der Radius beträgt $R = \frac{e^2}{mc^2}$ und der Drehimpuls (Spin) $S = \Theta\omega = \frac{\hbar}{2}$, wobei $\Theta = \frac{2}{5}mR^2$ das Trägheitsmoment bezeichnet. Vergleiche das mittles (d) berechnete Dipolmoment mit dem quantentheoretischen Wert $m = g\mu_B S = \frac{e\hbar}{2mc}$. Berechne auch die Rotationsgeschwindigkeit am Äquator. Diskutiere das Ergebnis. (2 Punkte)

2. *Allgemeine Eigenschaften der Multipolmomente* (26 Punkte)

   Betrachte eine allgemeine Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ die komplett in der Kugel $|\vec{x}| \leq R$ liegt. Wir sind hier an dem Fernfeld von $\Phi(\vec{x})$ für $|\vec{x}| \geq R$ interessiert. Hierzu wurden in der Vorlesung die Multipolmomente q_{lm} eingeführt als

   $$q_{lm} = \int Y^*_{lm}(\theta', \phi') r'^l \rho(\vec{x}') d^3x' \,. \tag{4}$$

   a) Wie läßt sich damit das Fernfeld $\Phi(\vec{x})$ schreiben? (1 Punkt)

   b) Sei $\rho(\vec{x})$ sphährisch symmetrisch, d. h. $\rho(\vec{x}) = \rho(|\vec{x}|)$. Welche Momente tragen zum Potential bei? Berechne das Potential und das Feld. (1 Punkt)

   c) Sei $\rho(\vec{x})$ invariant unter Reflektion am Ursprung, d. h. $\rho(\vec{x}) = \rho(-\vec{x})$. Für welche l tragen die Momente zum Potential bei? Was gilt entsprechend für den Fall $\rho(\vec{x}) = -\rho(-\vec{x})$? (2 Punkte)

   d) Die Ladungsverteilung sei zylindersymmetrisch, d. h. $\rho(\vec{x}) = \rho(z)$. Zeige, dass nur die Multipolmomente q_{l0} nicht verschwinden. (2 Punkte)

   e) Sei nun $\rho(z)$ ein quadratisches Polynom. Ausserdem verschwinde ρ ausserhalb der Kugel vom Radius R. Berechne alle nicht-verschwindenden Multipolmomente. Drücke dazu $\{1, z, z^2\}$ durch die entsprechenden Kugelflächenfunktionen aus. (3 Punkte)

   f) Zeige, dass $q_{l,-m} = (-1)^m q^*_{lm}$. (1 Punkt)

   g) Zeige anhand der Beispiele $l = 0, 1, 2$, dass die $r^l Y_{lm}(\vec{e}_r) = Y_{lm}(\vec{x})$ als homogene Polynome in den kartesischen Koordinaten vom Grad l angesehen werden können, d. h. $Y_{lm}(a\vec{x}) = a^l Y_{lm}(\vec{x})$. (1 Punkt)

   h) Zeige für gegebenes l, dass $\sum_{m=-l}^{l} q_{lm} r^l Y_{lm}(\vec{e}_r)$ für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ reell ist. (1 Punkt)

   i) Folgere damit im Fall $l = 1$, dass es einen Vektor $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ gibt, so dass $\vec{p} \cdot \vec{x} = \frac{4\pi}{3} \sum_{m=-1}^{1} q_{1m} r Y_{1m}(\vec{e}_r)$ gilt und berechne dieses kartesische Dipolmoment. Wie lautet der entsprechende Term im elektrischen Potential, ausgedrückt durch $\vec{p}$? (3 Punkte)

j) Zeige für $l = 2$, dass es eine symmetrische Matrix Q mit $\operatorname{Tr} Q = 0$ gibt, so dass $\frac{1}{2}\vec{x} \cdot Q \cdot \vec{x} = \frac{4\pi}{5} \sum_{m=-2}^{2} q_{2m} r^2 Y_{2m}(x)$ und berechne dieses kartesische Quadrupolmoment. Wie lautet der entsprechende Term im elektrischen Potential? (3 Punkte)

k) Berechne in (i) und (j) auch den jeweiligen Beitrag zum elektrischen Feld. Mit welcher Potenz $|x|$ fallen Potential bzw. Feld des Multipols l ab? (2 Punkte)

l) Begründe folgende Formel für die Energie W einer um $x = 0$ lokalisierten Ladungsverteilung ρ (Gesamtladung q) in einem äusseren elektrischen Potential Φ:

$$W = \int \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) d^3 x. \tag{5}$$

Folgere mittels Taylorentwicklung von $\Phi(\vec{x})$ um $x = 0$ sowie (i) und (j), dass

$$W = q\Phi(0) - \vec{p} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{\partial E^j}{\partial x^i}(0) + \dots \tag{6}$$

Verwende $\operatorname{div} E(0) = 0$ (warum?). Spezialisiere W auf die Energie eines Dipolmoments $\vec{p}$ am Ort $\vec{x}$ in einem elektrischen Dipolfeld $\Phi = \frac{\vec{p}' \cdot \vec{x}}{|x|^3}$, vgl. (k). (3 Punkte)

m)* Es gelte $q_{lm} = 0$ für alle $l < L$ und es gebe ein m mit $q_{Lm} \neq 0$. Wir betrachten eine neue Ladungsverteilung $\tilde{\rho}(\vec{x}) = \rho(\vec{x} + \vec{a}), a \in \mathbb{R}^3$. Zeige, dass die q_{lm} mit $l \leq L$ nicht von a abhängen. Das bedeutet insbesondere: das niedrigste nichtverschwindene Multipolmoment hängt nicht von der Wahl des Koordinatenursprungs ab. Zeige speziell, dass für nichtverschwindende Gesamtladung der Ursprung immer so gewählt werden kann, dass alle Komponenten des Dipolmoments verschwinden. (3 Punkte)