Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übung 7
27. November 2009
WS09/10

Übungen Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm

Quickies

1. Wie lauten die Maxwellgleichungen der Magnetostatik? Wie lauten die Maxwellgleichungen der Elektrodynamik?
2. Wie lautet das Biot-Savart Gesetz?
3. Wie lautet die Definition der Multipolmomente? Welche Multipolmomente tragen für den Fall einer sphärisch symmetrischen Ladungsverteilung bei? Welche für eine zylindersymmetrische Ladungsverteilung?

Anwesenheitsaufgaben

Allgemeines zu den Maxwellgleichungen
Im Rahmen dieser Anwesenheitsaufgabe sollen einige Eigenschaften der Maxwellgleichungen untersucht werden. Zunächst soll die Bedeutung des Verschiebungsstroms untersucht werden und anschließend soll das Poynting Theorem, welches eine Aussage über die Energiedichte von elektromagnetischen Feldern trifft, hergeleitet werden. Weiterhin erfüllen die Potentiale Φ und $\vec{A}$ die Wellengleichung.
Abschließend soll die Eigenschaft von Feldern unter den diskreten Symmetrien C, P und T untersucht und die Dualitätssymmetrie der Maxwellgleichungen im Vakkum betrachtet werden. Verallgemeinerungen hiervon spielen eine entscheidende Rolle in modernen Theorien der Physik.

1. Wie lauten die Maxwellgleichungen in der Elektrodynamik für das $\vec{E}$- und wie für das $\vec{B}$-Feld in Gauss Einheiten? Folgere aus den Maxwellgleichungen und den Eigenschaften von Differentialoperatoren ($\mathrm{div}\,\mathrm{rot} = 0$) die Ladungserhaltung. Warum ist hierzu die Einführung des Maxwellschen Verschiebungsstroms nötig?
2. Wie lautet der Zusammenhang zwischen Feld $\vec{E}, \vec{B}$ und den jeweiligen Potentialen Φ und $\vec{A}$? Zeige, dass die *Lorenzeichung* $\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ die Maxwellgleichungen für Φ und $\vec{A}$ entkoppelt. Zeige insbesondere

$$-\Delta\Phi - \frac{1}{c}\mathrm{div}\,\dot{\vec{A}} = 4\pi\rho, \tag{1}$$

   und die Wellengleichungen

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{A} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j},\\ \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\Phi &= 4\pi\rho.\end{aligned} \tag{2}$$

   Ist solch eine Eichung immer möglich?
3. Zeige, dass in der *Coulombeichung* $\mathrm{div}\vec{A} = 0$ die Maxwellgleichung für Φ genau dem statischen Fall entspricht. Ist solch eine Eichung immer möglich?

4. Begründe, warum ein elektromagnetisches Feld die Energie E_{mat} einer Ladungs- und Stromverteilung wie folgt ändert:

$$\frac{dE_{\text{mat}}}{dt} = \int \vec{j}(\vec{r},t) \cdot \vec{E}(\vec{r},t) d^3r. \tag{3}$$

Zerlege hierzu zunächst E_{mat} in infinitesimale Stücke $dE_{\text{mat}} = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{x}_i$ mit der Lorentzkraft $\vec{F}_i = q_i(\vec{E} + \frac{\vec{v}_i}{c} \wedge \vec{B})$ und identifiziere anschließend die Stromdichte $\vec{j}$ als

$$\vec{j} = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \tag{4}$$

5. Folgere aus den Maxwellgleichungen und Betrachtung von $\vec{E} \cdot \vec{j}$ das Poyntingtheorem

$$\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t}(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) + \text{div}\vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \tag{5}$$

mit dem *Poyntingvektor* $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E} \wedge \vec{B})$ und interpretiere das Ergebnis als Energiebilanz. *Hinweis*: $\text{div}\,(\vec{E} \wedge \vec{V}) = \vec{B} \cdot \text{rot}\,\vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot}\,\vec{B}$

6*. Betrachte die Transformationen C, P, T mit der Wirkung auf die Ladungsdichte:

$$\begin{aligned} \text{Zeitumkehr } T: &\quad t \to t' = -t, &\quad \varrho(\vec{r},t) \to \varrho'(\vec{r},t') = \varrho(\vec{r},-t) \\ \text{Raumspiegelung } P: &\quad \vec{r} \to \vec{r}' = -\vec{r}, &\quad \varrho(\vec{r},t) \to \varrho'(\vec{r}',t) = \varrho(-\vec{r},t) \\ \text{Ladungskonjugation } C: &\quad &\quad \varrho(\vec{r},t) \to \varrho'(\vec{r},t) = -\varrho(\vec{r},t) \end{aligned} \tag{6}$$

Wie sind $\vec{j}$ und die Felder zu transformieren, so dass die Maxwellgleichungen gelten?

7*. Die *Dualitätstransformation* wirkt als $\vec{B} \to \vec{E}$, $\vec{E} \to -\vec{B}$. Zeige die Invarianz der Vakuum-Maxwellgleichungen. Kann man auch kontinuierlich transformieren?

8*. Wieso haben die Maxwellgleichungen nur im Vakuum die Dualitätssymmetrie?

Hausaufgaben

Die Probeklausur findet am Donnerstag, den 3. Dezember von 10-12 Uhr in Hörsaal 1 PI statt. Zur Klausur darf ein beidseitig, handbeschriebenes DIN A4 Blatt mitgebracht werden.
Auf diesem Zettel gibt es keine Hausaufgaben. Stattdessen gibt es an dieser Stelle eine kleine Checkliste, die jedoch keinen Anspruch auf Vollständigkeit besitzt!

Checkliste

- Differentialoperatoren
- Koordinatensysteme
- Eigenschaften der Deltadistribution
- Coulomb Gesetz
- Zusammenhang Feld und Potential
- Superpositionsprinzip
- Anwendungen der Integralsätze von Gauss und Stokes
- Problem der Selbstenergie
- Elektrostatische Probleme und deren Lösung

- Oberflächenladungsdichte
- Poisson-Gleichung
- Greensfunktion
- Separationsansatz
- Randbedingungen
- Konzept der vollständigen Funktionensysteme
- Kugelflächenfunktionen und Legendre-Polynome als Lösungskonzept elektro- und magnetostatischer Probleme
- Multipolmomente
- Magnetostatische Probleme und deren Lösung
- Kontinuitätsgleichung
- Biot-Savart Gesetz
- Allgemeine Maxwellgleichungen, ihre Spezialiserungen und Folgerungen
- Eichbedingungen und Eichinvarianz
- Wellengleichung