Übungen Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm

Anwesenheitsaufgaben

1. *Greensche Funktion des Wellenoperators*
In der Elektrodynamik wird das Potential $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ über die inhomogene Wellengleichung der Form
$$\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad \text{mit} \quad \Box \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \tag{1}$$
durch den Viererstrom $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ bestimmt. Gleichungen dieses Typs kennen wir bereits aus der Elektro- und Magnetostatik in Form der Poisson-Gleichung, wozu $\Box$ formal durch den Laplace-Operator zu ersetzen ist. Wie dort die Greensfunktion zum Laplace-Operator die allgemeine Lösung bestimmt, erwarten wir auch in der Elektrodynamik, die Lösung mittels der Greensfunktion zu $\Box$ zu erhalten. Daher suchen wir die Greensfunktion $G(\vec{x}, t)$ des Wellenoperators im $\mathbb{R}^3$, d.h. eine Funktion so dass gilt
$$\Box G(\vec{x}, t) = \delta^{(3)}(\vec{x})\delta(t) \tag{2}$$
Es ist günstig, $G(\vec{x}, t)$ mittels Fourier-Transformation zu bestimmen, da sich dann die Differentialgleichung (2) auf eine algebraische Gleichung reduziert.
   a) Die Fouriertransformation bildet Ableitungen in Multiplikationen ab und vereinfacht somit das Problem: Zeige $(|\vec{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2})\tilde{G}(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2}$ für die Fouriertransformierte $\tilde{G}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3x dt e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} G(\vec{x}, t)$.
   b) Folgere aus a), dass mit beliebigen Funktionen $a_\pm(\vec{k})$ gilt:
$$\tilde{G}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{|\vec{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} + a_-(\vec{k})\delta(|\vec{k}| + \frac{\omega}{c}) + a_+(\vec{k})\delta(|\vec{k}| - \frac{\omega}{c}). \tag{3}$$
   Was ist demnach die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $\Box G(\vec{x}, t) = 0$?
   c) Wir betrachten nun nur noch den inhomogenen Term. Zeige, dass nach Anwenden der inversen Fouriertransformation mit $\omega_0 = c|\vec{k}|$ gilt:
$$G(\vec{x}, t) = -\frac{c^2}{(2\pi)^4}\int d^3k d\omega \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}. \tag{4}$$
   d) Zu berechnen ist demnach das Integral
$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{-i\omega t}. \tag{5}$$
   Wegen der Pole bei $\omega = \pm\omega_0$ ist es zweckmässig, den Integrationsweg über die reelle Achse in der Nähe der Pole in die komplexe Ebene hinein zu deformieren. Wir deformieren den Integrationsweg in die obere Halbebene hinein, dies entspricht der Wahl der *retardierten* Greenschen Funktion. Um den Cauchyschen Integralsatz bzw. den Residuensatz anwenden zu können, muss der Integrationsweg aber noch zu einer geschlossenen Kurve ergänzt werden, dies kann mit einem Halbkreis in der oberen oder unteren Halbebene geschehen. Zeige, dass für $t < 0$ ein Halbkreis mit unendlich großem Radius in der oberen, für $t > 0$ entsprechend in der unteren Halbebene keinen Beitrag zum Integral ergibt. Folgere, dass $I(t) = 0$ für $t < 0$.

e) Zeige mit dem Cauchyschen Integralsatz $f(\omega_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega$, wobei der Integrationsweg den Pol ω_0 positiv orientiert umschließt: $I(t) = -\frac{2\pi}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)\Theta(t)$. Damit gilt dann für die retardierte Greensche Funktion:

$$G_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \Theta(t) \frac{c}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{|\vec{k}|} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \sin(|\vec{k}|ct). \tag{6}$$

f) Führe in (5) Polarkoordinaten ein und integriere über die Winkel:

$$G_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = -\Theta(t) \frac{ic}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikr} \sin(kct). \tag{7}$$

Zeige schließlich mit $\int e^{i\vec{x}\cdot\vec{y}} d^n y = (2\pi)^n \delta^{(n)}(\vec{x})$, dass

$$G_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \Theta(t) \frac{c}{4\pi r} (\delta(r - ct) - \delta(r + ct)). \tag{8}$$

g) Gib die allgemeine Lösung der Wellengleichungen für Φ und $\vec{A}$ in Lorentzeichung mit Hilfe der Greenschen Funktion des Wellenoperators an.

Hausaufgaben **(31 Punkte)**

1. *Die Lorentzgruppe* (14 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen die fundamentalen Konzepte der speziellen Relativitätstheorie eingührt werden. Diese beinhalten den Begriff des Vierer-Vektors, den Minkowski-Raum und die Lorentztransformationen als seine Isometrien. Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^4$ mit der *Minkowskimetrik* $g = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ und

$$\langle x, x' \rangle := \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\mu x'^\nu = c^2 tt' - x^1 x'^1 - x^2 x'^2 - x^3 x'^3 =: x^0 x'^0 - \vec{x} \cdot \vec{x'} \tag{9}$$

für *Vierervektoren*

$$x = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

$\mathbb{R}^4$ mit dieser Metrik heißt *Minkowskiraum* oder $\mathbb{R}^{1,3}$. Ein Vierervektor ist

$$\left.\begin{array}{c} \text{raum-} \\ \text{licht-} \\ \text{zeit-} \end{array}\right\} \text{artig, falls } \langle x, x \rangle \left\{\begin{array}{l} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{array}\right. \tag{11}$$

a) Motiviere die Definition von Raum-, Licht- und Zeitartigkeit. (1 Punkt)

b) Warum betrachtet man als Symmetrietransformationen von Raum und Zeit nur lineare Abbildungen $x \mapsto \Lambda x$, in Komponenten: $x^\mu \mapsto \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu_\nu x^\nu =: \Lambda^\mu_\nu x^\nu$? (1 Punkt)

c) Zeige, dass die Forderung nach Konstanz der Lichtgeschwindigkeit auf

$$\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow \langle \Lambda x, \Lambda x \rangle = 0 \tag{12}$$

als Bedingung an Λ führt und zeige, dass diese Bedingungen durch

$$\langle \Lambda x, \Lambda x' \rangle = a(\Lambda) \langle x, x' \rangle \tag{13}$$

mit einem Faktor $a(\Lambda)$, der von Λ abhängen kann, erfüllt wird. (1 Punkt)

d) Warum darf man $a(\Lambda) = 1$ setzen? (1 Punkt)

Eine nicht schwierige, aber technische Rechnung (z.B. H.Römer/M.Forger, Elementare Feldtheorie, Wiley-VCH 1993, S.110) zeigt, dass die beiden Bedingungen in (3) äquivalent sind. Daher nennt man eine lineare Abbildung $\Lambda : \mathbb{R}^{1,3} \to \mathbb{R}^{1,3}$ *Lorentztransformation*, falls

$$\langle x, x' \rangle = \langle \Lambda x, \Lambda x' \rangle \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^{1,3}. \tag{14}$$

e) Folgere die Bedingung $\Lambda^T g \Lambda = g$ und vergleiche mit der für orthogonale Matrizen. (1 Punkt)

f) Wie kann man räumliche Drehungen als Lorentztransformationen interpretieren? (1 Punkt)

g) Zeige, dass die diskreten Transformationen Zeitumkehr $T = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ und Parität $P = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ Lorentztransformationen sind. (1 Punkt)

h) Folgere aus der definierenden Eigenschaft (14), dass $|\Lambda^0_0| \geq 1$ und $\det \Lambda = \pm 1$. (2 Punkte)

i) Was bedeutet $\Lambda^0_0 < 0$? Weshalb ist T für manchen keine Lorentztransformation? (1 Punkt)

j) Zeige, dass die Lorentztransformationen eine Gruppe bilden, und zwar die sog. *Lorentzgruppe* $\mathcal{L} = O(1,3)$, welche in vier Zweige zerfällt:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}^\uparrow_+ : \Lambda^0_0 \geq 1, \quad \det\Lambda = 1 & \mathcal{L}^\uparrow_- : \Lambda^0_0 \geq 1, \quad \det\Lambda = -1 \\ \mathcal{L}^\downarrow_- : \Lambda^0_0 \leq -1, \quad \det\Lambda = -1 & \mathcal{L}^\downarrow_+ : \Lambda^0_0 \leq -1, \quad \det\Lambda = 1 \end{array} \tag{15}$$

Wenn $\Lambda^0_0 \geq 1$, so heißt Λ *orthochron*. Falls $\det\Lambda = 1$, so nennt man Λ *eigentlich*. Die eigentlichen Lorentztransformationen $\mathcal{L}_+ := \mathcal{L}^\uparrow_+ \cup \mathcal{L}^\downarrow_+$ heißen auch $SO(1,3)$. (3 Punkte)

k) Wie erhält man aus der eigentlich orthochronen Gruppe die anderen Zweige? (1 Punkt)

2. *Boosts* (7 Punkte)
Hier diskutieren wir die physikalische Bedeutung der Lorentz-Transformationen.

a) Wieso erhält eine spezielle Galileitransformation nicht den Raumzeit-Abstand? (1 Punkt)

b) Wie muss nun solch ein Boost modifiziert werden? Betrachte dazu einen Boost mit Geschwindigkeit $\beta = \frac{v}{c}$ in einer Koordinatenrichtung und nutze die Isometriebedingung $\Lambda^T g \Lambda = g$ der Erhaltung des Raumzeitabstands aus. Führe dabei den "Pseudowinkel" (*Rapidität*) $\theta = \mathrm{arctanh}\beta = \mathrm{arccosh}\gamma$ ein , wobei $\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2$. (3 Punkte)

c) Zeige, dass ein Boost als eine Drehung um $i\theta$ interpretiert werden kann. (1 Punkt)

d) Leite das Additionstheorem für zwei parallele Geschwindigkeiten her. Multipliziere dazu die Matrizen zweier paralleler Boosts. (1 Punkt)

e) In welcher Größe ist die Hintereinanderausführung von Boosts additiv? (1 Punkt)

3. *Kontra- und Kovarianz* (10 Punkte)
Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^4$ mit der Minkowskimetrik $g = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ und Skalarprodukt $\langle x, x' \rangle := \sum_{\mu\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu x'^\nu$ für Vierervektoren $x = (x^0, \vec{x})^T$, so wie in der Anwesenheitsübung definiert. Wir bezeichnen Abbildungen $x \mapsto \Lambda x$, in Komponenten: $x^\mu \mapsto \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu =: \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ als Lorentztransformationen, wenn $\langle \Lambda x, \Lambda y \rangle = \langle x, y \rangle$, was auf $\Lambda^T g \Lambda = g$ als Bedingung an Λ führt. Die so definierten Vierervektoren nennt man *kontravariant*. Die zugehörigen *kovarianten* "Vektoren" (mit untenstehenden Indizes) definiert man als

$$x_{\mathrm{kov}} = (ct, -x^1, -x^2, -x^3) = (x^0, -\vec{x}) = x^T g, \tag{16}$$

in Komponenten: $x_\mu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\nu =: g_{\mu\nu} x^\nu$. Damit gilt dann

$$\langle x, x' \rangle = x_{\mathrm{kov}} \cdot x' = x_\mu x'^\mu = x'_\mu x^\mu = x'_{\mathrm{kov}} \cdot x. \tag{17}$$

a) Schreibe die Bedingung $\Lambda^T g \Lambda = g$ in Komponenten aus: $g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\kappa \Lambda^\nu{}_\lambda = g_{\kappa\lambda}$. (1 Punkt)

b) Zeige, $\langle x, x \rangle = x_{\mathrm{kov}} g^{-1} x^T_{\mathrm{kov}} = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu$, wobei $g^{\mu\nu} := (g^{-1})_{\mu\nu}$, also hier $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$. (1 Punkt)

c) Zeige, dass bei einer Lorentztransformation $x_{\text{kov}} \mapsto x_{\text{kov}}\Lambda^{-1}$ gilt. Zeige für die inverse Matrix in Komponenten: $(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = g_{\nu\beta}\Lambda^{\beta}{}_{\alpha}g^{\alpha\mu} =: \Lambda_{\nu}{}^{\mu}$, d.h. $x_\mu \mapsto \Lambda_{\mu}{}^{\nu}x_\nu$. (2 Punkte)

d) Wir definieren die Ableitungen $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ und $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Zeige, dass sich die Ableitung nach kontravarianten Koordinaten als kovarianter Vierervektor transformiert ("ein oberer Index im Nenner ist ein unterer Index") und umgekehrt. (2 Punkte)

e) Zeige für den Wellenoperator, dass $\Box = \partial^\mu\partial_\mu = \partial_\mu\partial^\mu$ und folgere seine Lorentzinvarianz. Man kann den Wellenoperator als Minkowski-Laplaceoperator interpretieren, die Drehinvarianz von Δ mutiert dabei zur Lorentz-Invarianz von $\Box$. (1 Punkt)

f) Die oben formulierten Transformationsregeln für ko- und kontravariante Vektoren haben eine natürliche Verallgemeinerung auf Tensoren n-ter Stufe, wobei für Vektoren $n = 1$ und für Skalare wie den Wellenoperator $n = 0$ gilt. Wir wollen nur $n = 2$ betrachten, dieser Fall ist hinreichend allgemein. Einen Tensor mit zwei kontravarianten Indizes definiert man durch das Transformationsverhalten

$$T^{\mu\nu} \mapsto \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}T^{\alpha\beta}, \quad \text{d.h. } T \mapsto \Lambda T \Lambda^T. \tag{18}$$

Folgere daraus das Transformationsverhalten für zwei kovariante bzw. gemischte Indizes, wobei Indizes mit der Metrik geschoben werden, z.B. $T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}T^{\alpha\beta}$. (3 Punkte)