Übungen Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm

Quickies

1. Was sind die Unterschiede zwischen Galilei- und Lorentz-Transformationen?
2. Was ist die definierende Eigenschaft der Lorentz-Transformationen?
3. Wie lautet der Wellenoperator? Wie kann man ihn als Skalarprodukt zweier Vierervektoren darstellen?
4. Wie vereinfacht die Fourier-Transformation die Bestimmung der Greensfunktion zum Wellenoperator?

Anwesenheitsaufgaben

1. *Kovarianz und der Feldstärketensor*

   Im ersten Teil dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die zunächst rein formal eingeführten Vektoren $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ und $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ in der Tat physikalische Vierer-Vektoren darstellen, d. h. sich unter Wechsel des Inertialssystems mittel einer Lorentztransformation Λ (oder allgemeiner Poincaretransformation) transformieren wie die Koordinaten, $x \mapsto x' = \Lambda x$, also

   $$j'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu(x)\,, A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\mu(x)\,. \tag{1}$$

   a) Argumentiere über die Kontinuitätsgleichung, dass j^μ ein kontravarianter Vierer-Vektor ist.

   b) Zeige in Lorenzeichung $\partial_\mu A^\mu = 0$, dass sich die Maxwellgleichungen als $\Box A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} j^\mu(x)$ schreiben lassen. Folgere daraus, dass A genau dann ein Vierervektor ist wenn j ein Vierervektor ist.

   c) Wieso gilt dann die Lorenzeichung in jedem Inertialsystem? Wie lauten die Maxwellgleichungen in einem anderen Inertialsystem?

   Da nun die Potentiale zu einem Vierervektor in der speziellen Relativitätstheorie vereint wurden, gilt entsprechendes für die physikalischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Dies erfolgt durch Einführung des sogenannten Feldstärketensors F mit $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \equiv (dA)^{\mu\nu}$.

   d) Zeige, dass aus der Wellengleichung für A^μ die inhomogenen Maxwellgleichungen folgen,

   $$(\mathrm{div} F)^\nu \equiv \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \frac{4\pi}{c} j^v(x)\,. \tag{2}$$

   Zeige ebenso die homogene Maxwellgleichung $(dF)_{\mu\nu\kappa} \equiv \partial_\mu F_{\nu\kappa} + \partial_\nu F_{\kappa\mu} + \partial_\kappa F_{\mu\nu} = 0$.

   e) Wie lautet die vier-dimensionale Formulierung einer Eichtransformation des Potentials A^μ? Wie transformiert sich F?

   f) Schreibe den elektromagnetischen Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ als Matrix und drücke die Einträge durch die elektromagnetischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus. Welche Symmetrien hat dieser Tensor? Zähle die Anzahl der unabhängigen Einträge.

   g) Wie transformiert sich $F^{\mu\nu}$ unter Lorentztransfomationen? Warum können daher weder $\vec{E}$ noch $\vec{B}$ Teil eines Vierervektors sein?

Hausaufgaben **(34 (39) Punkte)**

1. *Eigenschaften des (dualen) Feldstärketensor* (12 Punkte)
Hier werden einige nützliche Definitionen getroffen sowie wichtige Eigenschaften des Feldstärketensors demonstriert.

   a) Definiere den dualen Feldstärketensor $\hat{F}^{\mu\nu}$ als

$$\hat{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \tag{3}$$

   mit dem total antisymmetrischen Pseudotensor

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1, & \text{falls } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ eine gerade Permutation on } (0,1,2,3) \text{ ist} \\ -1, & \text{falls } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ eine ungerade Permutation on } (0,1,2,3) \text{ ist} \\ 0, & \text{falls zwei oder mehr Indizes gleich sind} \end{cases} \tag{4}$$

   Wie lauten die Komponenten von $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ und wie transformiert $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ unter Lorentztransformationen? Was ist das entsprechende Transformationsgesetz für $\hat{F}^{\mu\nu}$? Warum ist auch $\hat{F}$ eichinvariant? (2 Punkte)

   b) Zeige, dass die homogenen Maxwellgleichungen $\partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu}(x) = 0$ lauten. Schreibe diese Gleichungen so um, dass sie nur noch den Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ enthalten. Zeige, dass die Maxwellgleichungenx tatsächlich lorentzinvariant sind. Was dürfte auf der rechten Seite außer Null sonst stehen? (2 Punkte)

   c) Welche Transformation bildet F und $\hat{F}$ aufeinander ab? (1 Punkt)

   d) Schreibe sowohl die homogenen wie inhomogenen Maxwell-Gleichungen $\text{div}F = \frac{4\pi}{c}j$ und $dF = 0$ für die Komponenten von F explizit aus. Verfahre ebenso für $dA = F$. Vergleiche beide Ergebnisse mit den Maxwell-Gleichungen für $\vec{E}$, $\vec{B}$ sowie mit dem Zusammenhang der Felder und den Potentialen ϕ, $\vec{A}$. (4 Punkte)

   e) Zeige folgende Identitäten

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2)\,, \quad F_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu} = -4\vec{E}\cdot\vec{B}\,. \tag{5}$$

   Was passiert unter Lorentztransformationen und welche physikalische Konsequenz ergibt sich für die Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$. (3 Punkte)

2. *Erhaltung der Ladung & Relativität des magnetischen und elektrischen Feldes* (15 Punkte)
In dieser Aufgabe soll zum Einen gezeigt werden, dass die Gesamtladung q in allen Inertialsystem gleich ist. Zum anderen wollen wir die Relativität des elektromagnetischen Feldes untersuchen.

   a) Wir betrachten ein System mit $\vec{j} = 0$ und $\rho \neq 0$. Wie lautet j in einem relativ dazu mit $\vec{v}$ bewegten System? Wir nehmen nun ein Ergebnis der Relativitätstheorie vorweg, das besagt, dass sich bewegende Objekte eine Längenkontraktion (Lorentzkontraktion) erfahren. Folgere mit Hilfe der Lorentzkontraktion, dass die Gesamtladung $q = \frac{1}{c}\int d^3r j^0(x)$ invariant unter Lorentzboosts ist (warum ist sie es auch unter räumlichen Drehungen?), obwohl diese Größe nicht manifest lorentzinvariant ist, denn es handelt sich nicht um ein Minkowski-Skalarprodukt, vielmehr tauchen explizit räumliche und zeitliche Indizes auf. (2 Punkte)

   Nun wollen wir die Kraft, die ein stromdurchflossener Leiter auf eine sich ausserhalb des Leiters befindliche bewegte Ladung Q ausübt, von zwei verschiedenen Innertialsystemen aus betrachten. Im ersten System S soll der Leiter ruhen und die Ladung sich bewegen. Das zweite Innertialsystem S' soll sich mit der Ladung bewegen.

b) Durch einen zylinderförmigen Leiter fließe ein Strom $\vec{I}$ und ausserhalb des Leiters bewege sich eine Ladung Q mit der Geschwindigkeit v parallel zum Strom. Dadurch wirkt die Lorentzkraft $\vec{F} = \frac{Q}{c}\vec{v} \times \vec{B}$ auf die Ladung Q, wobei $\vec{B}$ das durch den Strom erzeugte Magnetfeld bezeichnet. Berechne diese Kraft als eine Funktion von I, Q, v und r. (3 Punkte)

c) Der Strom I setzte sich aus bewegten Elektronen mit der Ladungsdichte ϱ_- zusammen. Nehme an, dass sich die Elektronen ebenfalls mit der Geschwindigkeit v bewegen und drücke den Strom I durch ϱ_-, v und A aus, wobei A der Querschnitt des Leiters sein soll. Wie sieht die Kraft F nun aus? (3 Punkte)

d) Vom Innertialsystem S' aus betrachtet bewegt sich der Leiter mit der Geschwindigkeit v und die Ladung Q steht still. Die "neue" Länge des Leiters ist $L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$, wobei L_0 die Länge des Leiters im Innertialsystem S sein soll. Wie ändern sich die Ladungsdichten? Berechne $\varrho' = \varrho'_+ + \varrho'_-$ als Funktion von ϱ_+ (Beachte: $\varrho_- = -\varrho_+$). (4 Punkte)

e) Was hat sich nun geändert? Was für eine Art Kraft wirkt jetzt auf die Ladung Q? Berechne die Kraft F' als Funktion von Q, ϱ_+, A, v und r. Vergleiche mit dem Ergebnis aus b). (3 Punkte)

3. *Teilchenbewegung in einem konstanten elektromagnetischen Feld* (7 (12) Punkte)

In dieser Aufgabe soll die Dynamik eines relativistischen Teilchens in einem konstanten, elektromagnetischen Feld untersucht werden. Die allgemeine Wirkung für ein Punktteilchen der Masse m und Ladung q im Potential A lautet wie in der Vorlesung diskutiert

$$S_{\text{mat}} = -mc\int_{s_1}^{s_2} ds - \frac{q}{c}\int_{s_1}^{s_2} A^\mu(x(s))\frac{dx_\mu}{ds}ds\,, \tag{6}$$

wobei die Parametrisierung $x^\mu(s)$ durch die Bogenlänge s mit $ds^2 = \eta_\mu\nu dx^\mu dx^\nu$ gewählt wurde. Das erste Integral misst hierbei einfach die Länge der Bahnkurve $x : [s_1, s_2] \to \mathbb{R}^{1,3}$ im Minkowskiraum und der zweite Term beschreibt die Kopplung an das elektromagnetische Potential. Bemerke, dass die Ladung die Stärke der Kopplung beschreibt und daher als Kopplungskonstante angesehen wird. Insbesondere koppeln ungeladene ($q = 0$) Teilchen nicht elektromagnetisch.

a) Wie lautet die Wirkung in allgemeiner Parametrisierung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{1,3}$, $\sigma \mapsto x(\sigma)$? (1 Punkt)

b) Leite die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2}{d\tau^2}x^\mu(\tau) = \frac{q}{mc}F^\mu{}_\nu x'^\nu(\tau) \tag{7}$$

in einem konstanten elektromagnetischen Feld $F_{\mu\nu}$ unter der Benutzung des Wirkungsprinzips her. Hierzu wählen wir die Parametrisierung durch die Eigenzeit τ, d.h.

$$c\tau = \int_0^\tau \langle x'(\lambda), x'(\lambda)\rangle^{\frac{1}{2}} d\lambda\,, \tag{8}$$

wobei wir die Abkürzung $x'(\tau) = \frac{d}{d\tau}x(\tau)$ verwenden. Hierbei ist $\langle a, b\rangle = \eta^{\mu\nu}a_\mu b_\nu$ die Minkowski-Metrik wie auf Blatt 8 eingeführt. (2 Punkte)

c) Zeige, dass

$$x(\tau) = x_0 + \int_0^\tau d\lambda \exp((\tau - \lambda)\alpha F)x'_0, \tag{9}$$

mit $\alpha = \frac{q}{mc}$ eine Lösung der Bewegungsgleichung (7) für die Anfangsbedingung

$$x(0) = x_0 = \text{const.} \in \mathbb{R}^{1,3}, \quad x'(x) = x'_0 = \text{const.} \in \mathbb{R}^{1,3}, \tag{10}$$

ist. (2 Punkte)

d) Zeige, dass $G(\tau) = \exp(\tau\alpha F)$ für alle τ eine Lorentz-Transformation ist. Zeige dazu zunächst, dass $\langle Fa, b\rangle = -\langle a, Fb\rangle$, dann, dass gilt: $\frac{d}{d\tau}\langle G(\tau)a, G(\tau)b\rangle = 0$, und folgere daraus: $\langle G(\tau)a, G(\tau)b\rangle = \langle a, b\rangle$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^{1,3}$. (2 Punkte)

e)* Berechne $x(\tau)$ für den Spezialfall:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B \\ 0 & 0 & B & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Entwickle dazu $\exp(\tau\alpha F)$ in eine Potenzreihe. Es kann hilfreich sein, $F = F_1 + F_2$ in zwei Matrizen, die kommutieren, zu zerlegen. (5 Punkte)