Quantenmechanik und Statistische Physik für Lehramt

Dr. Hans Jockers

http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/qmlass18/index.php

Abgabe: 26.06.2018

H10.1 Wasserstoffatom

Ein idealisiertes Wasserstoffatom befinde sich im Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(2|1,0,0\rangle - |2,1,0\rangle + |2,1,1\rangle\right) \ ,$$

wobei $|n,l,m\rangle$ die normierten Eigenfunktionen der Operatoren $\hat{H}, \hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_z$ bezeichnen.

a) Zeigen Sie, dass $|\psi\rangle$ normiert ist. Geben Sie die möglichen Ergebnisse für die Eigenwerte bei einer Messung von $\hat{H}, \hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_z$ und deren Wahrscheinlichkeiten an.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte für die Messung von $\hat{H}, \hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_z$ und deren Varianz.

c) Bei der Messung der Energie am Zustand $|\psi\rangle$ wurde der Eigenwert $E = E_1$ gemessen. In welchem Zustand ist das System nach der Messung? Welche Eigenwerte von $\hat{L}_z$ sind möglich und mit welcher Wahrscheinlichkeit treten sie auf?

d) Bei der Messung des Drehimpulses am Zustand $|\psi\rangle$ wurde der Eigenwert zur Magnetquantenzahl $m = 0$ gemessen. In welchem Zustand ist das System nach der Messung? Geben Sie die möglichen Energie-Eigenwerte für nachfolgende Messungen, den Erwartungswert der Energie und dessen Varianz an.

(*6 Punkte*)

H10.2 Ensemble von harmonischen Oszillatoren

Gegeben sei ein Ensemble von N quantenmechanischen Oszillatoren mit der Gesamtenergie

$$U = \hbar\omega \sum_{k=1}^{N} n_k \ ,$$

wobei n_k die Energiequantenzahl des k-ten harmonischen Oszillators ist. (Wir haben hier die konstante Grundzustandsenergie $\frac{\hbar\omega N}{2}$ des Ensembles von harmonischen Oszillatoren von U abgezogen.)

a) Berechnen Sie die Zustandsfunktion $g(U,N)$ und die Entropie $S(U,N)$ für allgemeine N und für die Gesamtenergien $U = 0$, $U = \hbar\omega$, $U = 2\hbar\omega$ und $U = 3\hbar\omega$.

b) *Bonusaufgabe:* Argumentieren Sie, dass die Zustandsfunktion $g(U,N)$ allgemein gegeben ist durch den Koeffizienten z^u mit $u = \frac{U}{\hbar\omega}$ der generierenden Funktion

$$f(z) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right]^N = [1-z]^{-N} \ .$$

Berechnen Sie mit Hilfe von $f(z)$ einen expliziten Ausdruck für die Zustandsfunktion $g(U,N)$ und Entropie $S(U,N)$ für allgemeine Werte von U und N.

Bemerkung: Wenn Sie zuerst b) lösen, können Sie das Ergebnis in Teil a) benutzen.

(2+2 Punkte)

H10.3 Kurzfragen

a) Vergleichen Sie die Abhängigkeit der Energieeigenwerte von der (Haupt-)Quantenzahl n für den ein-dimensionalen unendlichen Potentialtopf, den ein-dimensionalen harmonischen Oszillator und das Wasserstoffatom.

b) Sind die Energieeigenwerte des Wasserstoffatoms entartet?

c) Was versteht man unter einem geschlossenen System in der statistischen Physik?

d) Wie ist der Begriff der Entropie in der statistischen Physik definiert?

(2 Punkte)