Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übungsblatt 11
26.06.2018
SS 2018

Quantenmechanik und Statistische Physik für Lehramt

Dr. Hans Jockers

http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/qmlass18/index.php

Abgabe: 03.07.2018

H11.1 Spin-$\frac{1}{2}$ System

Wir betrachten die quantenmechanischen Zustände eines Spin-$\frac{1}{2}$ Systems.

a) Zeigen Sie, dass die Operatoren $\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$, $i = 1, 2, 3$, mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

die Drehimpulsalgebra

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \hat{S}_k$$

erfüllen. Berechnen Sie den Operator $\hat{\vec{S}}^2$.

b) Der Hilbertraum $\mathcal{H}$ des Spin-$\frac{1}{2}$ Systems ist gegeben durch den Vektorraum $\mathbb{C}^2$ mit dem Skalarprodukt $\langle v|w\rangle = (v^*)^T w = v_1^* w_1 + v_2^* w_2$ für $v, w \in \mathbb{C}^2$. Zeigen Sie, dass in diesem Hilbertraum die Operatoren $\hat{S}_i$ selbstadjungiert sind.

c) Zeigen Sie, dass die Zustandsvektoren

$$\left|+\tfrac{1}{2}; z\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \left|-\tfrac{1}{2}; z\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein normiertes Orthonormalsystem von Eigenzuständen bezüglich des Operators $\hat{S}_z \equiv \hat{S}_3$ bilden. Interpretieren Sie die Eigenwerte bezüglich $\hat{S}_z$ und die Wirkung von $\hat{\vec{S}}^2$ auf die beiden Zustände $\left|\pm\frac{1}{2}; z\right\rangle$.

d) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Pauli-Matrix σ_1. Bestimmen Sie ein Orthonormalsystem von Eigenzuständen bezüglich des Operators $\hat{S}_x \equiv \hat{S}_1$. Stellen Sie die gefundenen normierten Eigenzustände bezüglich $\hat{S}_x$ als Linearkombination der Zustände $\left|\pm\frac{1}{2}; z\right\rangle$ dar.

e) Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten im Quantenzustand $\left|+\frac{1}{2}; z\right\rangle$ für die Drehimpulskomponente $\hat{S}_x$ den Wert $+\frac{\hbar}{2}$ und den Wert $-\frac{\hbar}{2}$ zu messen? Was ist der Erwartungswert von $\hat{S}_x$ in diesem Quantenzustand?
Hinweis: Benutzen Sie das Ergebnis aus d).

(*6 Punkte*)

H11.2 Die freie Energie eines Zwei-Zustand-Systems

Gegeben sei ein System mit zwei möglichen Zuständen $|0\rangle$ und $|\varepsilon\rangle$. Dabei hat der erste Zustand die Energie 0 und der zweite Zustand die Energie ϵ.

a) Finden Sie für dieses System einen Ausdruck für die freie Energie F als Funktion der Temperatur T.

b) Berechnen Sie aus der freien Energie F die Entropie S und die innere Energie U als Funktion von der Temperatur T. Skizzieren Sie die Entropie S als Funktion der Temperatur T.

(4 Punkte)