
Quantenmechanik und Statistische Physik für Lehramt

Dr. Hans Jockers

<http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/qmlclass18/index.php>

Abgabe: 24.04.2018

H2.1 Gaußsches Wellenpaket

Die Bewegung eines freien Teilchens der Masse m in einer Dimension werde durch ein Wellenpaket beschrieben, das zum Zeitpunkt $t = 0$ die Form hat

$$\psi(x, t = 0) = A e^{-\frac{x^2}{2a^2} + ik_0 x} .$$

- a) Berechnen Sie die Fouriertransformation $\tilde{\psi}(k, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ikx} \psi(x, 0)$.

Hinweis: Führen Sie durch quadratische Ergänzung das auftauchende Integral auf

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-cx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}} \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} c > 0$$

zurück.

(2 Punkte)

- b) Finden Sie durch Superposition ebener Materiewellen die zeitabhängige Lösung $\psi(x, t)$ der freien Schrödingergleichung für dieses Anfangswertproblem.

Hinweis: Die resultierende zeitabhängige Lösung ist proportional zu

$$\psi(x, t) \sim \exp\left(-\frac{x^2 - 2ia^2 k_0 x + \frac{i\hbar(k_0 a)^2 t}{m}}{2a^2 \left(1 + \frac{i\hbar t}{ma^2}\right)}\right) .$$

(2 Punkte)

- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$, und lesen Sie aus der Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x, t)$ die Gruppengeschwindigkeit v_g ab.

(2 Punkte)

- d) Diskutieren Sie die Breite der Wahrscheinlichkeitsdichten im Orts- und Impulsraum und die sich hieraus ergebende Orts-Impuls-Unschärfe in Abhängigkeit von der Zeit t .

Hinweis: Die Wahrscheinlichkeitsdichte im Impulsraum ist gegeben durch $\tilde{\rho}(k, t) = |\tilde{\psi}(k, t)|^2$. Zur Berechnung der Unschärferelation verwenden Sie als Maß für die Breite der Orts- und Impulsunschärfe die Standardabweichung σ der Gaußschen Glockenkurve

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} .$$

(2 Punkte)

H2.2 Schrödinger Gleichung mit Potential

Bestimmen Sie das Potential $V(x)$, für welches die Wellenfunktion

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{\alpha}{2}(x^2 + \frac{i\hbar t}{m})}$$

eine Lösung der Schrödinger Gleichung ist.

(2 Punkte)