Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übungsblatt 3
24.04.2018
SS 2018

Quantenmechanik und Statistische Physik für Lehramt

Dr. Hans Jockers

http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/qmlass18/index.php

Abgabe: In der Übung

H3.1 Taylorentwicklung

Entwicklen Sie die Funktion

$$f(x,y) = \log[1 + x - y + x^2 + 2y^2] \ ,$$

um $(x_0, y_0) = (0,0)$ bis zur zweiten Ordnung.

(*1 Punkt*)

H3.2 Gaußsches Wellenpaket und Erwartungswerte

Gegeben sei wieder das Wellenpaket aus Blatt 2 mit der Dichtefunktion

$$\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2 = \frac{|A|^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\hbar t}{ma^2}\right)^2}} \exp\left(-\frac{(x - v_g t)^2}{a^2\left(1 + \left(\frac{\hbar t}{ma^2}\right)^2\right)}\right) \ .$$

a) Bestimmen Sie die Konstante A so, dass die Normierungsbedingung für eine Wahrscheinlichkeitsdichte erfüllt ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\psi(x,t)|^2 = 1$$

Ist die Konstante A durch die Normierung eindeutig festgelegt?

(*1 Punkt*)

b) Wir definieren den *Erwartungswert* $\langle \hat{x}^n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, für die 1-dimensionale normierte Wellenfunktion $\psi(x,t)$ als

$$\langle \hat{x}^n \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n |\psi(x,t)|^2 \, .$$

Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \hat{x} \rangle$ für das Wellenpaket und interpretieren Sie das Ergebnis. Hätten Sie das Ergebnis auch ohne Rechnung erhalten können?

Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir mit der Gammafunktion $\Gamma(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^n e^{-ax^2} = \begin{cases} 0 & \textit{für } n = 2k+1 \ , \\ a^{-k-\frac{1}{2}}\,\Gamma(k + \frac{1}{2}) & \textit{für } n = 2k \ . \end{cases}$$

(*2 Punkte*)

c) Die *mittlere quadratische Schwankung* ist definiert als

$$\Delta x = \sqrt{\langle (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 \rangle} \ .$$

Zeigen Sie, dass die Relation $(\Delta x)^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2$ allgemein gilt. Berechnen Sie Δx für das Wellenpaket.

(*2 Punkte*)

H3.3 Kommutatoren von Operatoren

Seien $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ drei Differentialoperatoren, die linear auf eine (Wellen-)Funktion ψ wirken, d.h. $\hat{A} : \psi \to \hat{A}\psi$. Beispiele sind die Wirkung des ein-dimensionalen Impulsoperators $\hat{p}$ und die des Ortsoperators $\hat{x}$ auf eine x-abhängige Funktion $\psi(x)$:

$$\hat{p}\,\psi(x) = -i\hbar \frac{d\psi(x)}{dx} \ , \qquad \hat{x}\,\psi(x) = x \cdot \psi(x)$$

Der *Kommutator* zweier Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ ist definiert als $[\hat{A}, \hat{B}]\,\psi := \hat{A}(\hat{B}\psi) - \hat{B}(\hat{A}\psi)$. Zeigen Sie die Kommutatorrelationen:

a) $\left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] = \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{C}$

b) $\left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\right] = \hat{A}\left[\hat{B}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{C}\right]\hat{B}$

c) $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \ , \quad [\hat{x}, \hat{p}^n] = i\hbar n\, \hat{p}^{n-1}, \ n \in \mathbb{N}$

(*2 Punkte*)

H3.4 Kurzfragen

a) Welche Größen verbindet die Dispersionsrelation und wie lautet diese Relation für die Wellenfunktionen für Licht im Vakuum und für ein nicht-relativistisches, freies Materieteilchen?

b) Beschreibt die Schrödingergleichung eine relativistische Theorie oder eine nicht-relativistische Theorie?

c) Warum lässt sich das quantenmechanische Wellenpaket nicht als Dichteverteilung der Materie interpretieren?

d) Warum soll die Dichte $\rho = |\psi|^2$ der Wellenfunktion auf Eins normiert sein?

(*2 Punkte*)