Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übungsblatt 5
08.05.2018
SS 2018

Quantenmechanik und Statistische Physik für Lehramt

Dr. Hans Jockers

`http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/qmlass18/index.php`

Abgabe: 15.05.2018

H5.1 Differentialgleichungen

Gegeben sei die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y'' - a\,y' + 4y \;=\; 1 + x \;,$$

mit einem konstanten Parameter $a \in \mathbb{C}$.

a) Bestimmen Sie das Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung für $a \neq 4$.

b) Bestimmen Sie das Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung für $a = 4$.

c) Finden Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, und geben Sie dann die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für die Fälle $a \neq 4$ und $a = 4$ an.
Hinweis: Benutzen Sie für die inhomogene Lösung den Ansatz $y_0(x) = \alpha x + \beta$.

(*3 Punkte*)

H5.2 Unschärferelation

a) Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei hermitesche Operatoren. Zeigen Sie die Relation

$$\langle \hat{A}^2 \rangle \langle \hat{B}^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \left(\langle i[\hat{A}, \hat{B}] \rangle^2 + \langle \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \rangle^2 \right) \;.$$

Hinweis: Machen Sie den Ansatz $\tilde{\Psi} = (\hat{A} + i\gamma\hat{B})\Psi$ mit $\gamma \in \mathbb{C}$ und benutzen Sie die Ungleichung $\int dV |\tilde{\Psi}|^2 \geq 0$.

b) Zeigen Sie nun die verallgemeinerte Unschärferelation

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} \left(\langle i[\hat{A}, \hat{B}] \rangle^2 + \langle \hat{A}_0 \hat{B}_0 + \hat{B}_0 \hat{A}_0 \rangle^2 \right) \;,$$

wobei $\hat{A}_0 := \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$, $\hat{B}_0 := \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle$.

c) Betrachten Sie nun den Spezialfall $\hat{A} = \hat{x}$, $\hat{B} = \hat{p}$. Bestimmen Sie die Wellenfunktion minimaler Unschärfe im Ortsraum.
Hinweis: Leiten Sie aus der verallgemeinerten Unschärferelation eine Differentialgleichung für $\psi(x)$ her.

(*5 Punkte*)

H5.3 Eigenfunktionen

a) Der Separationsansatz für die Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung ist

$$\psi(x,t) = \varphi(x)\, e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \ ,$$

wobei der Parameter E mit der Energie des Systems identifiziert wurde. Leiten Sie aus der Normierungsbedingung her, dass E reell ist.

b) Zeigen Sie, dass die Varianz $(\Delta\mathcal{O})^2$ eines hermiteschen Operators $\hat{\mathcal{O}}$ in einem Zustand mit Wellenfunktion ψ genau dann verschwindet, wenn ψ eine Eigenfunktion ist, d.h. $\hat{\mathcal{O}}\psi = \lambda\psi$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Verwenden Sie die Ungleichung aus Aufgabe H5.2.

(2 Punkte)