
Quantenmechanik und Statistische Physik für Lehramt

Dr. Hans Jockers

<http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/qmlclass18/index.php>

Abgabe: 05.06.2018

H7.1 Gebundene Zustände des Delta-Potentials

Gegeben sei das Potential

$$V(x) = -\lambda \delta(x) \quad \text{mit} \quad \lambda > 0 .$$

Betrachten Sie für dieses Potential die gebundenen Zustände. Machen Sie dazu für die zeitunabhängige Schrödingergleichung einen Lösungsansatz für die Wellenfunktion. Bestimmen Sie die Anzahl der gebundenen Zustände und berechnen Sie deren Energie.

Hinweis: Benutzen Sie die in der Vorlesung hergeleiteten Randbedingungen der Wellenfunktion an der Stelle einer Delta-Funktion im Potential.

(3 Punkte)

H7.2 Operatoralgebra des Harmonischen Oszillators

Wir betrachten die Eigenfunktionen $\varphi_n = (n!)^{-1/2} (\hat{a}^\dagger)^n \varphi_0$ des Hamiltonoperators

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 \hat{x}^2$$

des harmonischen Oszillators mit den Leiteroperatoren

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} (m\omega\hat{x} + i\hat{p}) , \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} (m\omega\hat{x} - i\hat{p}) .$$

- Zeigen Sie die Relationen $\hat{a}\varphi_n = \sqrt{n}\varphi_{n-1}$ und $\hat{n}\varphi_n = n\varphi_n$ mit $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$.
- Leiten Sie die Orthonormalitätsrelation für die Eigenfunktionen φ_n her, unter der Annahme, dass die Eigenfunktion des Grundzustandes φ_0 normiert ist. Das heißt, es gilt also $\int dx |\varphi_0|^2 = 1$.
- Berechnen Sie $\Delta x \cdot \Delta p$ für den Zustand der Wellenfunktion φ_n aus der Operatoralgebra und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Heisenbergschen Unschärferelation.

Drücken Sie die Orts- und Impulsoperatoren \hat{x} und \hat{p} durch die Leiteroperatoren aus und berechnen Sie dann Δx und Δp .

(5 Punkte)

H7.3 Kurzfragen

- a) Was sind die qualitativen Eigenschaften der quantenmechanischen Lösungen für den endlichen Potentialtopf? Vergleichen Sie mit dem klassischen Fall.
- b) Wie sind Reflexions- und Transmissionskoeffizient R und T definiert und was bedeuten sie? Welche Beziehung erfüllen sie?
- c) Vergleichen Sie das Spektrum der Energieeigenwerte des unendlichen Potentialtopfs, des endlichen Potentialtopfs und des harmonischen Oszillators.
- d) Wie sind die Leiteroperatoren für den harmonischen Oszillator definiert? Wie lautet der Hamilton-Operator ausgedrückt durch diese und wie lautet die Algebra (d.h. die Kommutatoren) der Operatoren \hat{a}^\dagger , \hat{a} und \hat{H} ?

(2 Punkte)