Quantenmechanik und Statistische Physik für Lehramt

Dr. Hans Jockers

http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/qmlass18/index.php

Abgabe: 12.06.2018

H8.1 Lineare Abhängigkeit von Vektoren

a) Sind folgende Vektoren im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

$$\text{(i)} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \text{(ii)} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Falls die Vektoren linear abhängig sind, ergänzen Sie diese zu einem Erzeugendensystem.

b) Betrachten Sie nun den Vektorraum der komplexen Polynome in der Variable x. Sind folgende Polynome in diesem Vektorraum linear unabhängig?

$$\text{(i)} \quad \left\{ 1,\ 1+x\,, (1+x)^2\,, (1+x)^3 \right\},$$
$$\text{(ii)} \quad \left\{ 1+x+x^2,\ -1-2x+3x^2,\ (x-1)(x+\tfrac{1}{3}),\ (1+\tfrac{1}{3})^3 \right\}$$

(2 Punkte)

H8.2 Translationsoperator

Gegeben ist der Translationsoperator $\hat{T}(a) = \exp(ia\hat{p}/\hbar)$. Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{x}, \hat{T}(a)]$. Sei $|x\rangle$ Eigenzustand des Ortsoperators $\hat{x}$ mit Eigenwert x. Zeigen Sie, dass $\hat{T}(a)|x\rangle$ wieder ein Eigenzustand ist und berechnen Sie dessen Eigenwert.
Hinweis: Benutzen Sie das Ergebnis der Übungsaufgabe H 3.3 c).

(2 Punkte)

H8.3 Drehimpulsalgebra

Für kartesische Koordinaten im $\mathbb{R}^3$ verwenden wir die Notation $(x,y,z) = (x_1,x_2,x_3)$. Die x-Komponente v_x eines Vektors $\vec{v}$ wird dann alternativ $v_x = v_1$ geschrieben. Leiten Sie aus den Definitionen $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ und den Kommutatoren $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\hat{L}_k$ die folgenden Relationen her:

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar\hat{L}_z\ , \qquad \hat{L}^2 = \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z = \hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_z^2 + \hbar\hat{L}_z$$

(2 Punkte)

H8.4 Drehimpulsoperatoren im Ortsraum

Gegeben sind die Drehimpulsoperatoren

$$\hat{L}_i = -i\hbar \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k} \, ,$$

in der Ortsdarstellung in kartesischen Koordinaten und die Relationen

$$x = x_1 = r \sin\theta \cos\phi \, , \qquad y = x_2 = r \sin\theta \sin\phi \, , \qquad z = x_3 = r\cos\theta \, ,$$

zwischen den kartesischen Koordinaten $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ und den Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ). Berechnen Sie die Ausdrücke für die Differentialoperatoren $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ in Kugelkoordinaten.

(4 Punkte)