Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übungsblatt 9
12.06.2018
SS 2018

Quantenmechanik und Statistische Physik für Lehramt

Dr. Hans Jockers

http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/qmlass18/index.php

Abgabe: 19.06.2018

H9.1 Dreifaches Delta-Potential

Gegeben sei das Potential

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\lambda\delta(x) + \mu\left(\delta(x-a) + \delta(x+a)\right)\right] \quad \text{mit} \quad \lambda > 0,\ \mu > 0,\ a > 0\ .$$

Wir wollen für diese Potential die gebundenen Zustände bestimmen und untersuchen.

a) Betrachten Sie zunächst für sehr kleine und für sehr große Werte von a qualitativ die Struktur und die Anzahl der zu erwartenden gebundenen Zustände. Bestimmen Sie für diese gebundenen Zustände den Erwartungswert des Ortsoperators in führender Ordnung.

Hinweis: Rufen Sie sich das Ergebnis von Aufgabe H7.1 in Erinnerung.

b) Zeigen Sie, dass der Paritätsoperator $\hat{P}$ der Spiegelung $x \to -x$ mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}$ vertauscht, d.h. es gilt $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$. Argumentieren Sie, dass die zu berechnenden gebundenen Energieeigenzustände zusätzlich als Eigenzustände des Paritätsoperators gewählt werden können.

c) Machen Sie einen allgemeinen Lösungsansatz für die gebundenen Zustände der stationären Schrödingergleichung in den Abschnitten $x < -a$, $-a < x < 0$, $0 < x < a$ und $x > a$. Spalten Sie diesen allgemeinen Lösungsansatz in einen symmetrischen und antisymmetrischen Lösungsansatz auf. D.h. betrachten Sie Lösungsansätze mit den Eigenwerten $+1$ (symmetrisch) und -1 (antisymmetrisch) bzgl. des Paritätsoperators $\hat{P}$.

d) Betrachten Sie nun zunächst den symmetrischen Lösungsansatz für die gebundene Zustände, und leiten Sie aus den in der Vorlesung hergeleiteten Randbedingungen der Lösungsabschnitte ein lineares Gleichungssystem für die zu bestimmenden Integrationskonstanten her. Bestimmen Sie analog ein lineares Gleichungssystem aus dem antisymmetrischen Lösungsansatz.

Hinweis: Die hergeleiteten linearen Gleichungssysteme für die symmetrischen und die antisymmetrischen gebundenen Zustände sind jeweils Gleichungssysteme in drei Unbekannten.

e) Leiten Sie für die Energieeigenwerte der gebundenen Zustände aus den beiden Gleichungssystemen mit

$$\chi = \frac{1}{\hbar}\sqrt{-2mE} > 0$$

die transzendente Gleichung

$$e^{-2\chi a} = \frac{(\mu - 2\chi)(\lambda - 2\chi)}{\mu(\lambda + 2\chi)}$$

für die symmetrischen Zustände und

$$e^{-2\chi a} = \frac{\mu - 2\chi}{\mu}$$

für die antisymmetrischen Zustände her.

Hinweis: Betrachten Sie die Determinanten der beiden Gleichungssysteme.

f) Lösen Sie die beiden transzendenten Gleichungssystem für die Energieeigenwerte graphisch, und diskutieren Sie die Lösungsmengen der erhaltenden Energieeigenwerte für verschiedene Werte von a. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den Überlegungen in Teil a).

Bonusaufgabe: Leiten Sie jeweils für die symmetrischen und antisymmetrischen Zustände eine Gleichung in den Parametern a, μ, λ her, welche den Parameterraum in Bereiche mit unterschiedlicher Lösungsanzahl unterteilen.

g) *Bonusaufgabe:* Beschreiben Sie für sehr große Werte von a die in Teil a) erwarteten gebundenen Zustände als geeignete Linearkombinationen der graphisch ermittelten Lösungen.

(10+2+2 Punkte)