Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übungsblatt 11
07.06.2019
SS 2019

Quantenmechanik

Dr. Hans Jockers und Christoph Nega

http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/quantenmechanik/index.php

Abgabedatum: 21.06.2019

–Hausaufgaben–

H11.1 Wasserstoffatom

Ein idealisiertes Wasserstoffatom befinde sich im Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2|1,0,0\rangle - |2,1,0\rangle + |2,1,1\rangle\right) \;,$$

wobei $|n,l,m\rangle$ die normierten Eigenfunktionen der Operatoren $\hat{H}, |\hat{\vec{L}}|^2, \hat{L}_z$ bezeichnen.

a) Zeigen Sie, dass $|\psi\rangle$ normiert ist. Geben Sie die möglichen Ergebnisse für die Eigenwerte bei einer Messung von $\hat{H}, |\hat{\vec{L}}|^2, \hat{L}_z$ und deren Wahrscheinlichkeiten an.

(*1 Punkt*)

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte für die Messung von $\hat{H}, |\hat{\vec{L}}|^2, \hat{L}_z$ und deren Varianz.

(*1 Punkt*)

c) Bei der Messung der Energie am Zustand $|\psi\rangle$ wurde der Eigenwert $E = E_1$ gemessen. In welchem Zustand ist das System nach der Messung? Welche Eigenwerte von $\hat{L}_z$ sind möglich und mit welcher Wahrscheinlichkeit treten sie auf?

(*1 Punkt*)

d) Bei der Messung des Drehimpulses am Zustand $|\psi\rangle$ wurde der Eigenwert zur Magnetquantenzahl $m = 0$ gemessen. In welchem Zustand ist das System nach der Messung? Geben Sie die möglichen Energie-Eigenwerte für nachfolgende Messungen, den Erwartungswert der Energie und dessen Varianz an.

(*1 Punkt*)

e) Gegeben sei der Zustand $|1,0,0\rangle$. Geben Sie an, was die Messung von $\hat{L}_x$ ergibt.

(*1 Punkt*)

H11.2 Spin-$\frac{1}{2}$ System

Wir betrachten die quantenmechanischen Zustände eines Spin-$\frac{1}{2}$ Systems.

a) Zeigen Sie, dass die Operatoren $\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$, $i = 1, 2, 3$, mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

die Drehimpulsalgebra

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \hat{S}_k$$

erfüllen. Berechnen Sie den Operator $\hat{\vec{S}}^2$.

(*1 Punkt*)

b) Der Hilbertraum $\mathcal{H}$ des Spin-$\frac{1}{2}$ Systems ist gegeben durch den Vektorraum $\mathbb{C}^2$ mit dem Skalarprodukt $\langle v|w\rangle = (v^*)^T w = v_1^* w_1 + v_2^* w_2$ für $v, w \in \mathbb{C}^2$. Zeigen Sie, dass in diesem Hilbertraum die Operatoren $\hat{S}_i$ selbstadjungiert sind.

(*1 Punkt*)

c) Zeigen Sie, dass die Zustandsvektoren

$$\left|+\tfrac{1}{2}; z\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \left|-\tfrac{1}{2}; z\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein normiertes Orthonormalsystem von Eigenzuständen bezüglich des Operators $\hat{S}_z \equiv \hat{S}_3$ bilden. Interpretieren Sie die Eigenwerte bezüglich $\hat{S}_z$ und die Wirkung von $\hat{\vec{S}}^2$ auf die beiden Zustände $\left|\pm\frac{1}{2}; z\right\rangle$.

(*1 Punkt*)

d) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Pauli-Matrix σ_1. Bestimmen Sie ein Orthonormalsystem von Eigenzuständen bezüglich des Operators $\hat{S}_x \equiv \hat{S}_1$. Stellen Sie die gefundenen normierten Eigenzustände bezüglich $\hat{S}_x$ als Linearkombination der Zustände $\left|\pm\frac{1}{2}; z\right\rangle$ dar.

(*1 Punkt*)

e) Geben Sie an, wie groß die Wahrscheinlichkeiten sind, im Quantenzustand $\left|+\frac{1}{2}; z\right\rangle$ für die Drehimpulskomponente $\hat{S}_x$ den Wert $+\frac{\hbar}{2}$ und den Wert $-\frac{\hbar}{2}$ zu messen. Bestimmen Sie außerdem den Erwartungswert von $\hat{S}_x$ in diesem Quantenzustand.
Hinweis: Benutzen Sie das Ergebnis aus d).

(*1 Punkt*)

H11.3 Kaon Zerfall und Kaon Oszillationen

Das elektrisch neutrale, spin-null Teilchen Kaon ist ein Bindungszustand aus einem Down-Quark und einem Anti-Strange-Quark, $|K^0\rangle = (\mathrm{d\bar{s}})$. Sein Antiteilchen, das Anti-Kaon, besteht aus einem Anti-Down-Quark und einem Strange-Quark, $|\bar{K}^0\rangle = (\mathrm{\bar{d}s})$. In dieser Aufgabe möchten wir ein einfaches Model von Kaonen betrachten, in dem sowohl der Zerfall also auch die Oszillation dieser Teilchen beschrieben werden.
Wir modellieren diese beiden Zustände durch die Eigenvektoren der Pauli-Matrix σ_3. Hierbei entspricht ein Eigenvektor dem Teilchen $|K^0\rangle$ und der andere dessen Antiteilchen $|\bar{K}^0\rangle$.
Außerdem gibt es einen Operator $CP = \sigma_1$, welcher eine Kombination aus Paritätstransformation und Ladungskonjugation beschreibt. Die Wirkung dieser Transformation ist hierbei der Austausch von Teilchen und Antiteilchen, das heißt, der Zustand $|K^0\rangle$ geht über in den Zustand

$|\bar{K}^0\rangle$.

Die Dynamik dieses Systems wird durch den nicht-hermiteschen Hamiltonoperator

$$\hat{H} = c^2 \hat{M} - \frac{i}{2}\hat{\Gamma}$$

mit den hermiteschen Operatoren $\hat{M}$ und $\hat{\Gamma}$ beschrieben, die als (2×2)-Matrizen $\underline{M}$ bzw. $\underline{\Gamma}$ auf dem zwei-dimensionalen Hilbertraum der Kaonen $|K^0\rangle$ und $|\bar{K}^0\rangle$ operieren. Dabei beschreibt $\underline{M}$ die Masse der Kaonen und die positiv definite gewählte Matrix $\underline{\Gamma}$ die Zerfallseigenschaften der Kaonen.

Als eine fundamentale Symmetrie diese Systems verlangen wir eine Kombination aus CP- und Zeitumkehrtransformation, welche auch CPT Symmetrie genannt wird. Diese kann durch die Wirkung

$$\sigma_1 \underline{M} \sigma_1 = \underline{M}^* \quad \text{und} \quad \sigma_1 \underline{\Gamma} \sigma_1 = \underline{\Gamma}^*$$

auf den Matrizen $\underline{M}$ und $\underline{\Gamma}$ definiert werden.

a) Zeigen Sie zunächst die folgenden Eigenschaften der Pauli-Matrizen

- $\sigma_1^* = \sigma_1$, $\sigma_2^* = -\sigma_2$ und $\sigma_3^* = \sigma_3$
- $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma_k$ für $i, j = 1, 2, 3$
- $\det(a_0 \mathbb{1} + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3) = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$.

(2 Punkte)

b) Drücken Sie jeweils die hermiteschen Matrizen $\underline{M}$ und $\underline{\Gamma}$ als Linearkombination der Pauli-Matrizen und der $(2 \times 2)-$Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ aus. Zeigen Sie, dass der resultierende Hamiltonoperator $\underline{H}$ nicht von σ_3 abhängt.

(1 Punkt)

c) Berechnen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte des Hamiltonoperators $\underline{H}$ durch die Matrixelemente von $\underline{M}$ und $\underline{\Gamma}$. Überprüfen Sie, ob diese Eigenvektoren im Allgemeinen orthogonal sind.

(2 Punkte)

d) Wir nehmen nun an, dass auch CP eine Symmetrie unseres Systems darstellt. Dies bedeutet, dass

$$\sigma_1 \underline{M} \sigma_1 = \underline{M} \quad \text{und} \quad \sigma_1 \underline{\Gamma} \sigma_1 = \underline{\Gamma}$$

gelten muss. Zeigen Sie, dass dann der Hamiltonoperator $\underline{H}$ normal ist, das heißt, $[\underline{H}, \underline{H}^*] = 0$. Bestimmen Sie dann dessen Eigenwerte und Eigenzustände, die wir jeweils mit $|K_S\rangle$ (short) bzw. $|K_L\rangle$ (long) bezeichnen. Überprüfen Sie, ob nun die Eigenvektoren immer orthogonal sind.

(2 Punkte)

e) Die Lebensdauern der Eigenzustände $|K_S\rangle$ und $|K_L\rangle$ sind durch $\tau_S = \frac{\hbar}{\Gamma_1} = 0{,}9 \cdot 10^{-10}\,\text{s}$ und $\tau_L = \frac{\hbar}{\Gamma_2} = 0{,}5 \cdot 10^{-7}\,\text{s}$ gegeben. Darüber hinaus beträgt der Massenunterschied $m_{K_S} - m_{K_L} = 3{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{eV/c}^2$. Berechnen Sie soweit möglich die Matrixelemente von $\underline{M}$ und $\underline{\Gamma}$.

(1 Punkt)

f) Ein Kaon sei zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|K^0\rangle$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt t wieder ein Kaon $|K^0\rangle$ zu messen. Bestimmen Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt t ein Anti-Kaon $|\bar{K}^0\rangle$ zu messen.

(2 Punkte)