Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übungsblatt 12
21.06.2019
SS 2019

Quantenmechanik

Dr. Hans Jockers und Christoph Nega

http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/quantenmechanik/index.php

Abgabedatum: 28.06.2019

–Hausaufgaben–

H12.1 Spin-Spin-Kopplung

In dieser Aufgabe betrachten wir gekoppelte Spinsysteme. Ziel dieser Aufgabe ist, die Zustände des gekoppelten Systems durch die Eigenzustände des Gesamtspins und nicht durch die Quantenzahlen der Einzelsysteme auszudrücken.
Für die einzelnen Spinsysteme bilden $\{|\hat{\vec{L}}_1|^2, \hat{L}_{1,z}\}$ und $\{|\hat{\vec{L}}_2|^2, \hat{L}_{2,z}\}$ einen Satz von kommutierenden Operatoren. Als vereinfachende Notation verwenden wir für feste Quantenzahlen l_1 und l_2 im gekoppelten System $|m_1; m_2\rangle := |l_1, m_1\rangle \otimes |l_2, m_2\rangle$ mit einem Semikolon und für den Gesamtspin $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}}_1 + \hat{\vec{L}}_2$ schreiben wir $|j, m_j\rangle$ mit einem Komma.
Wir beginnen mit einer Kopplung von zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Systemen.

a) Bestimmen Sie die Wertebereiche der Gesamtspinquanzenzahl j und den dazugehörigen magnetischen Quantenzahlen m_j.

(*1 Punkt*)

b) Drücken Sie zunächst alle Spinzustände mit maximaler Gesamtspinquantenzahl j durch die Tensorzustände $|m_1; m_2\rangle$ aus. Beginnen Sie hierfür mit dem Zustand mit maximalem m_j und wenden Sie dann die Leiteroperatoren $\hat{J}_\pm$ an.

(*2 Punkte*)

c) Bestimmen Sie die restlichen Eigenzustände mit j nicht maximal über die Orthogonalität zu den bereits bestimmten Eigenzuständen $|j, m_j\rangle$.

(*1 Punkt*)

Also zweites Beispiel betrachten wir die Kopplung zweier Spin-1-Systeme.

d) Geben Sie alle möglichen Werte von j und den dazugehörigen Werten von m_j an. Beginnen Sie mit der magnetischen Quantenzahl $j_{\max}$ und konstruieren Sie mit Hilfe der Leiteroperatoren $\hat{J}_\pm$ alle Zustände mit der maximalen Quantenzahl $j_{\max}$.

(*2 Punkte*)

e) Betrachten Sie nun alle Zustände mit $j = 1$ und konstruieren Sie mit Hilfe der Leiteroperatoren $\hat{J}_\pm$ alle Zustände mit $j = 1$.

Hinweis: Machen Sie einen allgemeinen Ansatz für den Zustand $|1, 1\rangle$.

(*2 Punkte*)

f) Berechnen Sie die restlichen Zustände. Sie können hierzu wieder die Orthogonalitätsrelationen und/oder die Wirkung von $\hat{J}_\pm$ betrachten.

(*1 Punkt*)

H12.2 Harmonischer Oszillator in drei Dimensionen

Wir betrachten den harmonischen Oszillator in drei Dimensionen. Das Oszillatorpotential ist gegeben durch

$$V = \frac{m}{2}\omega^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = \frac{m}{2}\omega^2 r^2 \ .$$

Wir möchten den harmonischen Oszillator einmal in kartesischen und auch in Kugelkoordinaten lösen und dadurch zwei unterschiedliche aber äquivalente Sätze an Quantenzahlen erhalten.

a) Zeigen Sie, dass in kartesischen Koordinaten die Zustände des dreidimensionalen harmonischen Oszillators durch die Tensorzustände

$$|n_1, n_2, n_3\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \ \otimes |n_3\rangle$$

der Eigenzustände $|n_i\rangle$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators gegeben sind. Zeigen Sie außerdem, dass die Energieeigenwerte durch

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right) \quad \text{mit } n = n_1 + n_2 + n_3$$

gegeben sind.

(1 Punkt)

b) Nun verwenden wir Kugelkoordinaten und betrachten den Separationsansatz $\psi(r, \theta\phi) = \frac{u(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi)$, wobei $Y_{lm}(\theta, \phi)$ die Kugelflächenfunktionen sind. Bestimmen Sie die Differentialgleichung

$$u''(\rho) = \left(\rho^2 + \frac{l(l+1)}{\rho^2} - \frac{2E}{\hbar\omega}\right) u(\rho) \quad \text{mit } \rho = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} r \tag{1}$$

für den Radialanteil $u(r)$.

(1 Punkt)

c) Betrachten Sie das asymptotische Verhalten der Differentialgleichung (1) für $\rho \to 0$ und $\rho \to \infty$. Rechtfertigen Sie dadurch den Ansatz

$$u(\rho) = \rho^{l+1} \ \mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2}} \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^{2k}$$

für die Funktion $u(\rho)$.

(2 Punkte)

d) Leiten Sie für die Koeffizienten c_k der Funktion $u(\rho)$ eine Rekursionsformel her. Argumentieren Sie, dass diese Rekursionsbedingung abbrechen muss. Zeigen sie damit, dass die Energie durch

$$E = \hbar\omega\left(2n_r + l + \frac{3}{2}\right)$$

mit der Drehimpulsquantenzahl l und einer weiteren Quantenzahl n_r gegeben ist.

(2 Punkte)

e) Betrachten wir nun die Energieeigenräume zum Eigenwert $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right)$. Bestimmen Sie den Grad der Entartung (Dimension der Energieeigenräume) für festes n. Geben Sie für die Energieeigenwerte E_0, E_1 und E_2 die Eiegenzustände jewiels in den Quantenzahlen (n_1, n_2, n_3) und (n_r, l, m) an.

(2 Punkte)

f) Drücken Sie die Eigenzustände in den Quantenzahlen (n_r, l, m) zum Eigenwert $E_1 = \frac{5}{2}\hbar\omega$ durch die Eigenzuständen in den Quantenzahlen (n_1, n_2, n_3) aus.

Hinweis: Drücken Sie den Operator $\vec{L}_z$ durch die Leiteroperatoren $\hat{a}_i$ und $\hat{a}_i^\dagger$ für $i = 1, 2, 3$ der eindimenstionalen harmonischen Oszillatoren aus.

(3 Punkte)