Quantenmechanik

Dr. Hans Jockers und Christoph Nega

http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/quantenmechanik/index.php

Abgabedatum: 05.07.2019

–HAUSAUFGABEN–

H13.1 Auswahlregel Stark Effekt

In dieser Aufgabe möchten wir eine Auswahlregel zum Stark Effekt herleiten.

a) Sei $\hat{\vec{V}}$ ein vektorwertiger, hermitescher Operator, so gilt bezüglich des Gesamtdrehimpulses $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$ (siehe Vorlesung)

$$[\hat{J}_k, \hat{V}_l] = i\hbar\epsilon_{kln}\hat{V}_n \ .$$

Zeigen Sie, dass $[|\hat{\vec{L}}|^2, \hat{V}_l] = -i\hbar\epsilon_{kjl}\{\hat{L}_k, \hat{V}_j\}$ gilt, für $[\hat{S}_k, \hat{V}_l] = 0$. Hierbei ist $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ der Antikommutator.

(*1 Punkt*)

b) Benutzen Sie Teil a), um die Kommutatorrelation

$$[\ |\hat{\vec{L}}|^2, [|\hat{\vec{L}}|^2, \hat{z}]] = 2\hbar^2(|\hat{\vec{L}}|^2\hat{z} + \hat{z}|\hat{\vec{L}}|^2)$$

zu zeigen.

<u>*Hinweis*</u>: Beachten Sie, dass $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{p}}$ gilt.

(*3 Punkte*)

c) Zeigen Sie nun, dass der Kommutator aus b) die Bedingung

$$0 = (l + l')(l + l' + 2)(l - l' + 1)(l - l' - 1)$$

liefert. Geben Sie eine Auswahlregel für die Matrixelemente $\langle n, l, m|\hat{z}|n', l', m'\rangle$ an.

(*1 Punkt*)

H13.2 Relativistische Korrekturen des Wasserstoffatoms

Die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$E = \sqrt{c^2|\vec{p}|^2 + c^4m^2} \tag{1}$$

bewirkt eine Korrektur der Energieeigenwerte des Wasserstoffatoms. Diese möchten wir in dieser Aufgabe berechnen.

a) Entwickeln sie die relativistische Energie-Impuls-Beziehung (1) bis zur Ordnung in $|\vec{p}|^4$ und identifizieren Sie den Störterm $\hat{H}_1$.

(1 Punkt)

b) Argumentieren Sie, dass die Matrixelemente des Störterms $\hat{H}_1$ die Eigenschaft

$$\langle n,l,m|\hat{H}_1|n',l',m'\rangle = 0 \quad \text{für } l \neq l' \text{ oder } m \neq m'$$

besitzen.

(2 Punkte)

c) Berechnen Sie die Störungstheorie für die Energieeigenwerte bis zur ersten Ordnung.
<u>*Hinweis:*</u> Verwenden Sie die Erwartungswerte $\langle \frac{1}{r} \rangle_{nlm} = \frac{1}{r_B n^2}$ und $\langle \frac{1}{r^2} \rangle_{nlm} = \frac{1}{r_B^2 n^3 (l+\frac{1}{2})}$, wobei r_B der Bohrsche Radius ist.

(2 Punkte)

H13.3 Anomaler Zeeman-Effekt

Ein Wasserstoffatom in einem schwachen Magnetfeld, welches wir in z-Richtung wählen, wird durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H}_{\text{Zeeman}} = -\frac{e}{2mc}(\hat{J}_z + \hat{S}_z)B$$

beschrieben. Zeigen Sie, dass die erste Ordnung Störungstheorie zur Energierkorrektur

$$\langle n,l,l \pm \frac{1}{2}, mj|\hat{H}_{\text{Zeeman}}|n,l,l \pm \frac{1}{2}, m_j\rangle = \mu_B B m_j \left(1 \pm \frac{1}{2l+1}\right)$$

führt, wobei μ_B das Bohrsche Magneton ist.
Drücken Sie hierfür zunächst die Zustände $|n,l,l \pm \frac{1}{2}, m_j\rangle$ in einer geeigneten Basis aus und bestimmen Sie die dazugehörigen Clebsch-Gordan-Koeffizienten. Dazu ist es nützlich sich die Wirkung von $|\hat{\vec{J}}|^2$ auf diese Zustände zu betrachten, um daraus ein Gleichungssystem für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten zu erhalten.

(5 Punkte)

H13.4 Variationsprinzip

Wir betrachten einen halben harmonischen Oszillator mit Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} .$$

a) Argumentieren Sie, dass der Grundzustand die Energie $\frac{3}{2}\hbar\omega$ hat.

(1 Punkt)

b) Wenden Sie das Variationsprinzip an, indem Sie als Ansatz für die Wellenfunktion die Funktionenscharen $\psi_\alpha(x) = Ax\mathrm{e}^{-\alpha x}$ und $\psi_\beta(x) = Ax\mathrm{e}^{-\beta x^2}$ jeweils in Abhängigkeit der positiven Parameter α und β betrachten.

(3 Punkte)

c) Vergleichen Sie nun die Ergebnisse aus dem Variationsprinzip mit dem exakten Energieeigenwert der Grundzustandes.

(1 Punkt)