Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übungsblatt 2
05.04.2019
SS 2019

Quantenmechanik

Dr. Hans Jockers und Christoph Nega

http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/quantenmechanik/index.php

Abgabedatum: 11.04. & 12.04.2019
Abgabeort: Abgabemappen liegen vor Büro 2.009 im BCTP aus.

–Hausaufgaben–

H2.1 Gaußsches Wellenpaket

Die Bewegung eines freien Teilchens der Masse m in einer Dimension werde durch ein Wellenpaket beschrieben, das zum Zeitpunkt $t = 0$ die Form hat

$$\psi(x, t = 0) = A\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2} + ik_0 x} \ .$$

a) Beweisen Sie zunächst folgende Identität

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-cx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}} \ , \quad \text{für} \quad \mathrm{Re}\, c > 0 \ .$$

<u>*Hinweis*:</u> Betrachten Sie hierfür $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-cx^2}\right)^2$ und gehen Sie über zu Polarkoordinaten.

(*2 Punkte*)

b) Gegeben sei die Gaußsche Glockenkurve

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \ .$$

Zeigen Sie, dass die Fuktione $f(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, dass heißt, $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x) = 1$.
Berechnen Sie ferner den Erwartungswert und die Standardabweichung von $f(x)$.

(*3 Punkte*)

c) Berechnen Sie die Fourier-Transformation

$$\tilde{\psi}(k, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ikx}\, \psi(x, 0) \ .$$

<u>*Hinweis*:</u> Führen Sie das auftauchende Integral mit Hilfe einer quadratischen Ergänzung auf das Integral aus Teil a) zurück.

(*3 Punkte*)

d) Finden Sie durch Superposition ebener Materiewellen die zeitabhängige Lösung $\psi(x,t)$ der freien Schrödingergleichung für dieses Anfangswertproblem.
<u>*Hinweis:*</u> Die resultierende zeitabhängige Lösung ist proportional zu

$$\psi(x,t) \sim \exp\left(-\frac{x^2 - 2ia^2k_0x + \frac{i\hbar(k_0a)^2t}{m}}{2a^2\left(1+\frac{i\hbar t}{ma^2}\right)}\right) \ .$$

(*2 Punkte*)

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ und bestimmen Sie die Normierungskonstante A, so dass gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ |\psi|^2 = 1$. Lesen Sie außerdem aus der Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t)$ die Gruppengeschwindigkeit v_g ab.

(*2 Punkte*)

f) Berechnen und interpretieren Sie die Breite der Wahrscheinlichkeitsdichten im Orts- und Impulsraum und die sich hieraus ergebende Orts-Impuls-Unschärfe in Abhängigkeit von der Zeit t.
<u>*Hinweis:*</u> Beachten Sie, dass im Impulsraum die Wahrscheinlichkeitsdichte gegeben ist durch $\tilde{\rho}(k,t) = |\tilde{\psi}(k,t)|^2$. Zur Berechnung der Unschärferelation verwenden Sie als Maß für die Breite der Orts- und Impulsunschärfe die Standardabweichung der gaußförmigen Lösungsfunktionen.

(*4 Punkte*)

H2.2 Teilchen in einem Potential

Gegeben sei die Wellenfunktion

$$\psi(x,t) = A\ x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\mathrm{e}^{-i\frac{3}{2}\omega t} \ ,$$

welche ein Teilchen in einem Potential in einer Dimension beschreibt.

a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante A.

(*1 Punkt*)

b) Bestimmen Sie das zur Wellenfunktion $\psi(x,t)$ gehörende Potential $V(x)$.

(*3 Punkte*)