Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übungsblatt 3
12.04.2019
SS 2019

# Quantenmechanik

Dr. Hans Jockers und Christoph Nega

http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/quantenmechanik/index.php

Abgabedatum: 18.04.2019
Abgabeort: Abgabemappen liegen vor Büro 2.009 im BCTP aus.

–Hausaufgaben–

## H3.1 Gaußsches Wellenpaket und Erwartungswerte

Gegeben sei wieder das Wellenpaket aus Blatt 2 mit der Dichtefunktion

$$\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2 = \frac{|A|^2}{\sqrt{1+\left(\frac{\hbar t}{ma^2}\right)^2}} \exp\left(-\frac{(x-v_g t)^2}{a^2\left(1+\left(\frac{\hbar t}{ma^2}\right)^2\right)}\right) .$$

a) Wir definieren den *Erwartungswert* $\langle \hat{x}^n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, für die 1-dimensionale normierte Wellenfunktion $\psi(x,t)$ als

$$\langle \hat{x}^n \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n |\psi(x,t)|^2 .$$

Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{x} \rangle$ und $\langle \hat{x}^2 \rangle$ für das Wellenpaket.

*Hinweis*: Für $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir mit der Gammafunktion $\Gamma(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^n e^{-ax^2} = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 2k+1 \ , \\ a^{-k-\frac{1}{2}}\,\Gamma(k+\frac{1}{2}) & \text{für } n = 2k \ . \end{cases}$$

(*5 Punkte*)

b) Zeigen Sie, dass für die Varianz $(\Delta\hat{x})^2$ folgende Relation gilt

$$(\Delta\hat{x})^2 = \langle (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 \ .$$

Bestimmen Sie die Standardabweichung $\Delta\hat{x}$ für das Wellenpaket. Interpretieren Sie den Erwartungswert $\langle \hat{x} \rangle$ und die Standardabweichung $\Delta\hat{x}$ des Wellenpakets physikalisch.

(*2 Punkte*)

## H3.2 Kommutatoren

In dieser Aufgaben möchten wir verschiedene Kommutatoridentitäten untersuchen. Zur Erinnerung, der Kommutator zweier Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ ist gegeben durch $[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$.

a) Zeigen Sie, dass der Kommutator die Jacobi–Identität

$$[\hat{A},[\hat{B},\hat{C}]]+[\hat{B},[\hat{C},\hat{A}]]+[\hat{C},[\hat{A},\hat{B}]]=0$$

erfüllt.

(*1 Punkt*)

b) Zeigen Sie, dass der Kommutator die folgenden Produktregeln erfüllt

$$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=\hat{B}[\hat{A},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{B}]\hat{C} \quad \text{und} \quad [\hat{A}\hat{B},\hat{C}]=\hat{A}[\hat{B},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{C}]\hat{B}\ .$$

(*1 Punkt*)

c) Nehmen Sie an, dass $[\hat{A},\hat{C}]=0$ und $[\hat{B},\hat{C}]=0$ gilt. Entscheiden Sie, ob nun auch $[\hat{A},\hat{B}]=0$ gilt.

(*1 Punkt*)

d) Gegeben seien drei Operatoren $\hat{A},\hat{B}$ und $\hat{C}$, die die Kommutatorrelationen $[\hat{A},\hat{B}]=\hat{C}$ und $[\hat{A},\hat{C}]=[\hat{B},\hat{C}]=0$ erfüllen. Zeigen Sie nun, dass für eine Operatorfunktion $f(\hat{B})$ folgende Identität gilt

$$[\hat{A},f(\hat{B})]=\hat{C}\frac{\partial}{\partial\hat{B}}f(\hat{B})$$

*<u>Hinweis</u>:* Nehmen Sie für die Operatorfunktion $f(\hat{B})$ an, dass sie als ein Polynom oder Potenzreihe in $\hat{B}$ geschrieben werden kann. Es ist dann hilfreich zunächst die Identität $[\hat{A},\hat{B}^n]=n\hat{C}\hat{B}^{n-1}$ zu zeigen, die Sie mit vollständiger Induktion beweisen können.

(*3 Punkte*)

e) Wir nehmen an, dass $[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]=[\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]]=0$ gilt. Beweisen Sie unter dieser Annahme die Baker–Campell–Hausdorff–Formel $\mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}}=\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$.

*<u>Hinweis</u>:* Zeigen Sie, dass die Funktion $f(t)=e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}}$ die Differentialgleichung $f'(t)=f(t)(\hat{A}+\hat{B}+t[\hat{A},\hat{B}])$ erfüllt, und lösen Sie diese Differentialgleichung.

(*4 Punkte*)

## H3.3 Freies Teilchen in Polarkoodinaten

Durch Anwendung der heuristischen Ersetzungsregeln erhalten wir aus der Hamiltonfunktion $H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}\right)$ des 2-dimensionalen freien Teilchens der Masse $m$ in Polarkoordinaten $(r,\varphi)$ den Operator

$$\hat{H}_{\text{naiv}}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\partial_r^2+\frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2\right)\ .$$

Überprüfen Sie, ob der Operator $\hat{H}_{\text{naiv}}$ hermetisch ist und als Hamiltonoperator des 2-dimensionalen freien Teilchens in Frage kommt.

(*3 Punkte*)