Quantenmechanik

Dr. Hans Jockers und Christoph Nega

http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/quantenmechanik/index.php

Abgabedatum: 26.04.2019

–Hausaufgaben–

H4.1 Erwartungswerte

Gegeben sei die ein-dimensionale Wellenfunktion in $\mathbb{R}$

$$\psi(x,t) = Ae^{-a|x|-i\omega t} \ , \qquad A, \omega \in \mathbb{R}\, , \ a \in \mathbb{R}^+ \ .$$

Normieren Sie ψ und berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{x} \rangle$,$\langle \hat{x}^2 \rangle$,$\langle \hat{p} \rangle$ und $\langle \hat{p}^2 \rangle$.

(*3 Punkte*)

H4.2 Hermitesche Operatoren

In dieser Aufgabe möchten wir ein paar einfache Eigenschaften von hermiteschen Operatoren zeigen. Wir betrachten zunächst zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ die *nicht* selbstadjungiert sein müssen.

a) Zeigen Sie, dass für das Produkt zweier Operatoren gilt $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$. (*1 Punkt*)

b) Zeigen Sie, dass der Operator $\hat{A} + \hat{A}^\dagger$ hermitesch ist. (*1 Punkt*)

c) Sei $\hat{A}$ ein anti-hermitescher Operator, d.h. $\hat{A}^\dagger = -\hat{A}$. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert $\langle A \rangle$ Null oder imaginär ist. (*1 Punkt*)

In den folgenden Aufgabenteile seien nun $\hat{A}$ und $\hat{B}$ hermitesche Operatoren.

d) Zeigen Sie, dass der Operator $\alpha\hat{A} + \beta\hat{B}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ hermitesch ist. (*1 Punkt*)

e) Zeigen Sie, dass der Operator $i[\hat{A}, \hat{B}]$ hermitesch ist. (*1 Punkt*)

f) Zeigen Sie, dass der Operator $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ hermitesch ist. (*1 Punkt*)

g) Zeigen Sie, die Identität $\langle i[\hat{A}, \hat{B}] \rangle = 2\,\mathrm{Im}\left[\int dV \left((\hat{B}\psi)^* (\hat{A}\psi) \right)\right]$. (*1 Punkt*)

H4.3 Klassischer Limes des Kommutators

Wir wollen den klassischen Limes $\hbar \to 0$ des Kommutators zweier Operatoren herleiten. Dazu betrachten wir zwei Operatoren $\hat{A} = \hat{A}(\hat{q}_k, \hat{p}_k)$ und $\hat{B} = \hat{B}(\hat{q}_k, \hat{p}_k)$, die als nicht-kommutative Polynome in den verallgemeinerten Orts- und Impulsoperatoren $\hat{q}_k$ und $\hat{p}_k$ (mit $k = 1, \ldots, N$ und den kanonischen Kommutatorrelationen $[\hat{q}_k, \hat{p}_\ell] = i\hbar\delta_{k\ell}$) geschrieben werden können. D.h. wir betrachten die Menge $\Omega = \{\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_N, \hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_N\}$ der verallgemeinerten Orts- und Impulsoperatoren und die Menge der nicht-kommutativen Monome

$$W(\Omega) = \{\hat{z}_1 \cdots \hat{z}_s \,|\, \hat{z}_j \in \Omega, s \geq 1\} \cup \{1\} \ ,$$

so dass wir die Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ ausdrücken können durch

$$\hat{A} = \sum_{\mathcal{M} \in I_A \subset W(\Omega)} a_{\mathcal{M}} \, \mathcal{M} \ , \qquad \hat{B} = \sum_{\mathcal{M} \in I_B \subset W(\Omega)} b_{\mathcal{M}} \, \mathcal{M} \ ,$$

wobei die Koeffizienten der Monome komplexe Zahlen sind, d.h. $a_{\mathcal{M}}, b_{\mathcal{M}} \in \mathbb{C}$, und die Menge der Monome $I_A \subset W(\Omega)$ und $I_B \subset W(\Omega)$ endlich sind. Im klassischen Limes $\hbar \to 0$ werden die Operatoren $\hat{A}$ and $\hat{B}$ zu Polynomen in den verallgemeinerten Phasenraumkoordinaten (q_k, p_k), d.h. $\lim_{\hbar \to 0} \hat{A} = A(q_k, p_k)$ und $\lim_{\hbar \to 0} \hat{B} = B(q_k, p_k)$.

a) Argumentieren Sie zunächst, dass wir den Operator $\hat{A}$ (und somit auch $\hat{B}$) in folgende Form bringen können

$$\hat{A} = \sum_{k_1, \ldots, k_N} \sum_{\ell_1, \ldots, \ell_N} a_{(k_1, \ldots, k_N), (\ell_1, \ldots, \ell_N)} \hat{q}_1^{k_1} \cdots \hat{q}_N^{k_N} \hat{p}_1^{l_1} \cdots \hat{p}_N^{l_N}$$

mit den Koeffizienten $a_{(k_1, \ldots, k_N), (\ell_1, \ldots, \ell_N)} \in \mathbb{C}$, wobei lediglich endlich vielen Koeffizienten von Null verschieden sind.

(2 Punkte)

b) Betrachten wir die Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$ mit dem kanonischen Kommutator $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ und dem klassischen Limes zu den Phasenraumkoordinaten x und p. Zeigen Sie, dass im klassischen Limes gilt

$$\lim_{\hbar \to 0} \frac{[\hat{x}^n \hat{p}^m, \hat{x}^r \hat{p}^s]}{i\hbar} = \frac{\partial(x^n p^m)}{\partial x} \frac{\partial(x^r p^s)}{\partial p} - \frac{\partial(x^n p^m)}{\partial p} \frac{\partial(x^r p^s)}{\partial x} \quad \text{für} \quad n, m, r, s \in \mathbb{N}_0 \ .$$

(4 Punkte)

c) Benutzen Sie das Ergebnis von a) und b) um zu zeigen, dass der klassische Limes des Kommutators $\frac{[\hat{A}, \hat{B}]}{i\hbar}$ durch die Poissonklammer gegeben ist, also

$$\lim_{\hbar \to 0} \frac{[\hat{A}, \hat{B}]}{i\hbar} = \sum_k \frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \sum_k \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q_k} = \{A, B\}_{\mathrm{PK}} \ .$$

(4 Punkte)