Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übungsblatt 5
26.04.2019
SS 2019

Quantenmechanik

Dr. Hans Jockers und Christoph Nega

http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/quantenmechanik/index.php

Abgabedatum: 03.05.2019

–Hausaufgaben–

H5.1 Unschärferelation

a) Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei hermitesche Operatoren. Zeigen Sie die Relation

$$\langle \hat{A}^2 \rangle \langle \hat{B}^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \left(\langle i[\hat{A}, \hat{B}] \rangle^2 + \langle \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \rangle^2 \right) \ .$$

Hinweis: Machen Sie den Ansatz $\tilde{\Psi} = (\hat{A} + i\gamma\hat{B})\Psi$ mit $\gamma \in \mathbb{C}$ und benutzen Sie die Ungleichung $\int dV |\tilde{\Psi}|^2 \geq 0$.

(*3 Punkte*)

b) Zeigen Sie nun die verallgemeinerte Unschärferelation

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} \left(\langle i[\hat{A}, \hat{B}] \rangle^2 + \langle \hat{A}_0\hat{B}_0 + \hat{B}_0\hat{A}_0 \rangle^2 \right) \ ,$$

wobei $\hat{A}_0 := \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$, $\hat{B}_0 := \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle$.

(*1 Punkt*)

c) Betrachten Sie nun den Spezialfall $\hat{A} = \hat{x}$, $\hat{B} = \hat{p}$. Bestimmen Sie die Wellenfunktion minimaler Unschärfe im Ortsraum.
Hinweis: Leiten Sie aus der verallgemeinerten Unschärferelation eine Differentialgleichung für $\psi(x)$ her.

(*5 Punkte*)

H5.2 Eigenschaften der Schrödingergleichung in einer Dimension

Wir betrachten die Schrödingergleichung für ein Teilchen in einer Dimension im Potential $V(x)$.

a) Zeigen Sie, dass die Energie E des Teilchens größer sein muss, als der kleinste Wert $V_{\min}$ des Potentials. Entscheiden Sie, ob diese Einschränkung auch klassisch Sinn macht.
Hinweis: Skizzieren Sie eine normierbare Wellenfunktion und leiten Sie hieraus eine Bedingung an die zweite Ableitung $\psi''(x)$ ab. Benutzen Sie dann die zeitunabhängige Schrödingergleichung, um zu argumentieren, dass es für $E \leq V_{\min}$ keine normierbaren Lösungen geben kann.

(*2 Punkte*)

b) Beweisen Sie, dass die Energieniveaus normierbarer Eigenzustände nicht entartet sind, dass heißt, wenn ψ_1 und ψ_2 normierbare Eigenfunktionen zur selben Energie E sind, dann müssen ψ_1 und ψ_2 linear abhängig sein.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\psi_1''\psi_2 - \psi_1\psi_2'' = 0$ und integrieren Sie diese Gleichung zweimal. Die erste Integrationskonstante lässt sich über die Randbedingung bestimmen.
(2 Punkte)

H5.3 δ-Potential

In dieser Aufgabe möchten wir uns mit dem δ-Potential

$$V(x) = -\lambda\delta(x) \quad \text{mit} \quad \lambda > 0$$

beschäftigen. Wir möchten die normierten Eigenfunktionen und deren Energieeigenwerte bestimmen. Hierbei beschränken wir uns auf Bindungszuständen, das heißt, wir betrachten nur Teilchen deren Energie negativ ist.

a) Bestimmen Sie die Grenzbedingungen an die Wellenfunktion $\psi(x)$ und $\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)$ für den Fall des δ-Potentials.
Hinweis: Integrieren Sie die Eigenwertgleichung des Hamiltonoperators zwischen $-\epsilon$ und ϵ und bilden Sie danach den Grenzwert $\epsilon \to 0$. Berücksichtigen Sie hierbei die Eigenschaften der δ-Funktion.
(3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Wellenfunktion $\psi(x)$ für das δ-Potential. Normieren Sie diese im Sinne der Quantenmechanik.
(2 Punkte)

c) Verwenden Sie die aus Teil a) hergeleitete Grenzbedingung für die Ableitung $\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)$, um die Energieeigenwerte zu berechnen.
(2 Punkte)