

Quantenmechanik

Dr. Hans Jockers und Christoph Nega

<http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/quantenmechanik/index.php>

Abgabedatum: 10.05.2019

–HAUSAUFGABEN–

H6.1 Eigenschaften Hermitescher Operatoren

In der Vorlesung wurde ein Operator \hat{O} als hermitesch definiert, wenn dieser folgende Eigenschaft für jede normierbare Wellenfunktion ψ erfüllt

$$\int_X dV (\hat{O}\psi)^*\psi = \int_X dV \psi^*(\hat{O}\psi).$$

Zeigen Sie, dass dann auch

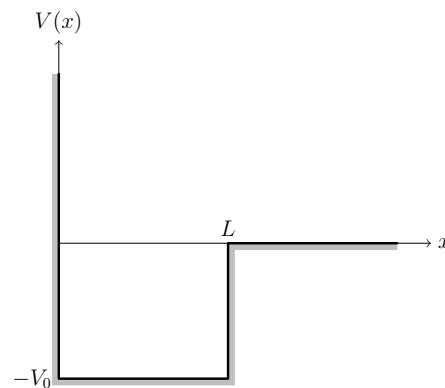
$$\int_X dV (\hat{O}\psi_1)^*\psi_2 = \int_X dV \psi_1^*(\hat{O}\psi_2)$$

für beliebige normierbare Wellenfunktionen ψ_1 und ψ_2 gilt.

(2 Punkte)

H6.2 Potentialtopf

Gegeben sei ein Potentialtopf der Form:



Das heißt, dass das Potential $V(x)$ gegeben ist durch

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{für } x < 0 \\ -V_0 & \text{für } 0 < x < L \\ 0 & \text{für } x \geq L \end{cases} \quad \text{mit } V_0 > 0, L > 0.$$

Wir betrachten die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ eines quantenmechanischen Teilchens im obigen ein-dimensionalen Potential.

- a) Geben Sie die Energiebereiche an, in denen Sie jeweils gebundene Zustände oder Streuzustände erwarten.

(1 Punkt)

- b) Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung für gebundene Zustände in den einzelnen Abschnitten $x < 0$, $0 < x < L$ und $x > L$ des Potentialtopfs.

(1 Punkt)

- c) Bestimmen Sie die Integrationskonstanten der Lösungen in den einzelnen Abschnitten durch Verwendung der Anschlussbedingungen und der Normierbarkeit der Wellenfunktion $\psi(x, t)$ für die gebundenen Zustände. Benutzen Sie die dimensionslose Konstante ζ und den energieabhängigen Parameter z , geben durch

$$\zeta = \frac{L}{\hbar} \sqrt{2mV_0}, \quad z = \frac{L}{\hbar} \sqrt{2m(E + V_0)} > 0,$$

um für die Energieeigenwerte E die transzendente Gleichung

$$\tan z = -\frac{z}{\sqrt{\zeta^2 - z^2}} \quad (1)$$

herzuleiten.

(2 Punkte)

- d) Lösen Sie die transzendente Gleichung (1) für $\zeta = \pi$ graphisch und bestimmen Sie für $\zeta = \pi$ die Anzahl der gebundenen Energieeigenzustände. Geben Sie die positiven Werte von ζ an, sodass es keine gebundenen Zustände gibt.

(2 Punkte)

- e) Vergleichen Sie die erhaltene transzendente Gleichung (1) mit den transzendenten Gleichungen für Bedingungszustände des endlichen Potentialtopfs (siehe Vorlesung) und begründen Sie auftretende quantitative Übereinstimmungen.

(1 Punkt)

- f) *Bonusaufgabe:* Gegeben sei eine einlaufende ebene Welle von rechts. Bestimmen Sie (ohne Rechnung) den Transmissionskoeffizient T und den Reflektionskoeffizient R für diese von rechts einlaufende Welle. Begründen Sie Ihre Antwort.

(+1 Bonuspunkt)

H6.3 Dreifaches Delta-Potential

Gegeben sei das Potential

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} [\lambda\delta(x) + \mu(\delta(x-a) + \delta(x+a))] \quad \text{mit } \lambda > 0, \mu > 0, a > 0.$$

Wir wollen für diese Potential die gebundenen Zustände bestimmen und untersuchen.

- a) Betrachten Sie zunächst für sehr kleine und für sehr große Werte von a qualitativ die Struktur und die Anzahl der zu erwartenden gebundenen Zustände. Bestimmen Sie für diese gebundenen Zustände den Erwartungswert des Ortsoperators in führender Ordnung. Hinweis: Rufen Sie sich das Ergebnis von Aufgabe H5.3 in Erinnerung.

(1 Punkt)

- b) Zeigen Sie, dass der Paritätsoperator \hat{P} der Spiegelung $x \rightarrow -x$ mit dem Hamiltonoperator \hat{H} vertauscht, das heißt, es gilt $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$. Argumentieren Sie, dass die zu berechnenden gebundenen Energieeigenzustände zusätzlich als Eigenzustände des Paritätsoperators gewählt werden können.

(1 Punkt)

- c) Machen Sie einen allgemeinen Lösungsansatz für die gebundenen Zustände der stationären Schrödingergleichung in den Abschnitten $x < -a$, $-a < x < 0$, $0 < x < a$ und $x > a$. Spalten Sie diesen allgemeinen Lösungsansatz in einen symmetrischen und antisymmetrischen Lösungsansatz auf, das heißt, betrachten Sie Lösungsansätze mit den Eigenwerten $+1$ (symmetrisch) und -1 (antisymmetrisch) bzgl. des Paritätsoperators \hat{P} .

(2 Punkte)

- d) Betrachten Sie nun zunächst den symmetrischen Lösungsansatz für die gebundene Zustände, und leiten Sie aus den in der Vorlesung hergeleiteten Randbedingungen der Lösungsabschnitte ein lineares Gleichungssystem für die zu bestimmenden Integrationskonstanten her. Bestimmen Sie analog ein lineares Gleichungssystem aus dem antisymmetrischen Lösungsansatz.

(2 Punkte)

- e) Leiten Sie für die Energieeigenwerte der gebundenen Zustände aus den beiden Gleichungssystemen mit

$$\chi = \frac{1}{\hbar} \sqrt{-2mE} > 0$$

die transzendente Gleichung

$$e^{-2\chi a} = \frac{(\mu - 2\chi)(\lambda - 2\chi)}{\mu(\lambda + 2\chi)}$$

für die symmetrischen Zustände und

$$e^{-2\chi a} = \frac{\mu - 2\chi}{\mu}$$

für die antisymmetrischen Zustände her.

(2 Punkte)

- f) Lösen Sie die beiden transzendenten Gleichungen für die Energieeigenwerte graphisch, und diskutieren Sie die Lösungsmengen der erhaltenden Energieeigenwerte für verschiedene Werte von a . Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den Überlegungen in Teil a). Leiten Sie jeweils für die symmetrischen und antisymmetrischen Zustände eine Gleichung in den Parametern a, μ, λ her, welche den Parameterraum in Bereiche mit unterschiedlicher Lösungsanzahl unterteilen.

(3 Punkte)

- g) *Bonusaufgabe:* Beschreiben Sie für sehr große Werte von a die in Teil a) erwarteten gebundenen Zustände als geeignete Linearkombinationen der graphisch ermittelten Lösungen.

(+1 Bonuspunkt)