Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übungsblatt 7
10.05.2019
SS 2019

Quantenmechanik

Dr. Hans Jockers und Christoph Nega

http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/quantenmechanik/index.php

Abgabedatum: 17.05.2019

–Hausaufgaben–

H7.1 Phasenverschiebung an der Potentialstufe

Gegeben sei die Potentialstufe mit dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

wobei wir die beiden Fälle $V_0 > 0$ und $V_0 < 0$ getrennt betrachten wollen. Es soll die Streuung einer von links einlaufenden ebenen Welle der Energie $E > \max(V_0, 0)$ für beide Potentialtypen analysiert werden. Insbesondere deren Phasenverschiebung nach der Streuung an der Potentialstufe.

a) Geben Sie die allgemeine Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung in den zwei Bereichen $x < 0$ und $x > 0$ für $V_0 > 0$ und $V_0 < 0$ für eine von links einlaufende Welle der Energie E an. Bestimmen Sie dann die Lösung des gegebenen Problems aus den geeigneten Randbedingungen bei $x = 0$.

(*1 Punkt*)

b) Berechnen Sie für $V_0 > 0$ und $V_0 < 0$ die Stromdichte für die einfallende, die reflektierte und die durchlaufende Welle und geben Sie die Koeffizienten für den reflektierten und den transmittierten Anteil an. Geben Sie die qualitativen Unterschiede zum klassischen Ergebnis an.

(*1 Punkt*)

c) Geben Sie die Phasenbeziehung zwischen einlaufender Welle und reflektierter Welle für die zwei Fälle $V_0 > 0$ und $V_0 < 0$ an. Erklären Sie dadurch das Auftreten von destruktiver Interferenz der reflektierten Welle bei Streuung am endlichen Potentialtopf im Resonanzfall.

(*1 Punkt*)

H7.2 Leiteroperatoren des Harmonischen Oszillators

In der Vorlesung haben wir die Leiteroperatoren des harmonischen Oszillators kennengelernt. Zur Erinnerung wiederholen wir hier deren Definition

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}) \quad \text{mit} \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega\hat{x} + i\hat{p}) \quad \text{und} \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega\hat{x} - i\hat{p}) \ ,$$

und deren Kommutatorrelation $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

a) Wir definieren den Besetzungszahloperator $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$. Zeigen Sie

   i) $\hat{N}$ ist ein hermitescher Operator, der auf die normierten Energieeigenfunktionen $\varphi_n(x)$ von $\hat{H}$ wie folgt wirkt $\hat{N}\varphi_n(x) = n \cdot \varphi_n(x)$,

   ii) die Kommutatorrelationen $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$ und $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$,

   iii) die Kommutatorrelation $[\hat{a}, \left(\hat{a}^\dagger\right)^n] = n \left(\hat{a}^\dagger\right)^{n-1}$

   iv) und abschließend die Kommutatorrelation $[\hat{N}, \left(\hat{a}^\dagger\right)^n] = n \left(\hat{a}^\dagger\right)^n$.

(2 Punkte)

b) Zeigen Sie explizit mit Hilfe der Leiteroperatoren, dass die Energieeigenfunktionen $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\hat{a}^\dagger\right)^n \varphi_0(x)$ orthonormal sind, falls die Grundzustandsfunktion $\varphi_0(x)$ normiert ist.

(1 Punkt)

c) Drücken Sie den Orts- und Impulsoperator durch die Leiteroperatoren aus.

(1 Punkt)

d) Wir betrachten nun zeitunabhängige kohärente Zustände

$$\varphi_\alpha(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha \hat{a}^\dagger\right)^n}{n!} \varphi_0(x) \quad \text{mit} \quad \hat{a}\varphi_\alpha(x) = \alpha \varphi_\alpha(x)$$

Bestimmen Sie die Standardabweichungen $\Delta\hat{x}$ und $\Delta\hat{p}$. Stellen Sie die Heisenbergsche Unschärferelation auf und diskutieren Sie die Form der Wellenfunktion. Berechnen Sie außerdem für den kohärenten Zustand den Energieerwartungswert $E_\alpha = \langle \hat{H} \rangle$.

(3 Punkte)

e) Wir betrachten nun die zeitabhängigen kohärenten Zustände

$$\psi_\alpha(x) = \mathrm{e}^{-\frac{i\omega t}{2}} \varphi_{\alpha(t)}(x) \quad \text{mit} \quad \alpha(t) = \mathrm{e}^{-i\omega t}\alpha \; .$$

Bestimmen Sie die zeitabhängigen Erwartungswerte $\langle \hat{x} \rangle$ und $\langle \hat{p} \rangle$ und argumentieren Sie mit Hilfe des Ehrenfest Theorems, dass die Erwartungswerte die klassischen Bewegungsgleichungen erfüllen.

(2 Punkte)

H7.3 Analytische Lösungsmethode des Harmonischen Oszillators

Wir betrachten den harmonischen Oszillator mit Hamiltonoperator

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \; .$$

In der Vorlesung wurde bereits die algebraische Lösungsmethode mit Hilfe der Leiteroperatoren besprochen. In dieser Aufgabe möchten wir nun die analytische Herangehensweise diskutieren.

a) Zeigen Sie, dass die stationäre Schrödingergleichung mit der Substitution $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ auf die dimensionslose gewöhnliche Differentialgleichung

$$\varphi''(y) - (y^2 - \lambda)\varphi(y) = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega} > 0 \tag{1}$$

führt.

(1 Punkt)

b) Lösen Sie zunächst die Differentialgleichung (1) asymptotisch, das heißt, für $y^2 \gg \lambda$.

(*2 Punkte*)

c) Wegen dem asymptotischen Verhalten aus b) machen wir den Ansatz $\varphi(y) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2} \cdot H(y)$, wobei $H(y)$ die notwendige Bedingung für die Normierbarkeit

$$\lim_{y \to \pm\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2} \cdot H(y) = 0 \tag{2}$$

erfüllen muss. Leiten Sie die Differentialgleichung für $H(y)$ her, welche auch als hermitesche Differentialgleichung in der Literatur bekannt ist.

(*1 Punkt*)

d) Leiten Sie aus (2) für die Koeffizienten h_n des Lösungsansatzes

$$H(y) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n y^n$$

eine Rekursionsgleichung her.

(*1 Punkt*)

e) Bestimmen Sie aus der Rekursionsgleichung aus d) mögliche Werte von λ, sodass die Normierbarkeit (2) erfüllt ist.

(*2 Punkte*)

f) Geben Sie mit Hilfe von e) die ersten vier Energieeigenfunktionen und deren Energieeigenwerte an.

(*1 Punkt*)