Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übungsblatt 8
17.05.2019
SS 2019

Quantenmechanik

Dr. Hans Jockers und Christoph Nega

http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/quantenmechanik/index.php

Abgabedatum: 24.05.2019

–Hausaufgaben–

8.1 Kohärente Zustände des Harmonischen Oszillators

In dieser Aufgabe möchten wir wieder kohärente Zustände des harmonischen Oszillators untersuchen und weitere Eigenschaften dieser zeigen. Zur Erinnerung, ein normierter, kohärenter Zustand $|\alpha\rangle$ ist ein Eigenzustand des nicht-hermiteschen Operators $\hat{a}$, das heißt,

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \quad \text{und} \quad \langle\alpha|\alpha\rangle = 1 \ .$$

Eine Entwicklung dieser kohärenten Zustände in Energieeigenfuktionen wurde bereits in H7.2 diskutiert.

a) Wir definieren zunächst den Verschiebungsoperator

$$\hat{D}_\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^\star\hat{a}} \ .$$

Zeigen Sie, dass der Verschiebungsoperator $\hat{D}_\alpha$ unitär ist und auf den Grundzustand wie

$$\hat{a}\hat{D}_\alpha\,|0\rangle = \alpha\hat{D}_\alpha\,|0\rangle$$

wirkt.

(*2 Punkte*)

b) Zeigen Sie, dass der kohärente Zustand $|\alpha\rangle$ geschrieben werden kann als $|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\,|0\rangle$. Drücken Sie $\hat{D}_\beta\,|\alpha\rangle$ als Linearkombination von kohärenten Zuständen aus.
Hinweis: Betrachten Sie das Produkt $\hat{D}_\alpha\hat{D}_\beta$ mit Hilfe der Baker-Campell-Hausdorff-Formel, siehe H3.2 e).

(*2 Punkte*)

c) Wir definieren nun einen weiteren Operator $\hat{R}_\lambda = \mathrm{e}^{i\lambda\hat{a}^\dagger\hat{a}}$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ist. Zeigen Sie, dass $\hat{R}_\lambda$ ein unitärer Operator ist und dass dieser auf kohärente Zustände wie

$$\hat{R}_\lambda\,|\alpha\rangle = |\mathrm{e}^{i\lambda}\alpha\rangle$$

wirkt.

(*2 Punkte*)

d) Überprüfen Sie, ob es sich bei den kohärenten Zuständen $|\alpha\rangle$, um einen Satz von orthonormalen Zuständen handelt. Zeigen Sie, dass eine allgemeine Wellenfunktion des harmonischen Oszillators nicht eindeutig in kohärente Zustände $|\alpha\rangle$ entwickelt werden kann.

(2 Punkte)

e) Zeigen Sie, dass die kohärenten Zustände die Vollständigkeitsrelation

$$\frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}^2\alpha \;\; |\alpha\rangle\langle\alpha| = \frac{1}{\pi}\int \mathrm{dRe}(\alpha)\mathrm{dIm}(\alpha) \;\; |\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{\mathbb{1}}$$

erfüllen.

(2 Punkte)

f) Zeigen Sie, dass es für den Operator $\hat{a}^\dagger$ keine normierbaren Eigenfunktionien gibt. Folglich kann keine ähnliche Diskussion wie in dieser Aufgabe über die Eigenfunktionen von $\hat{a}^\dagger$ erfolgen.

(1 Punkt)

8.2 Bandstruktur in Festkörpern

Für ein einfaches Model der Bandstruktur in einem Festerkörper betrachten wir in dieser Aufgabe ein eindimensionales, periodisches Potential der Form $V(x) = V(x+a)$ und den zugehörigen Einteilchen-Hamiltonoperator

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \hat{V}(x) \quad \text{mit} \quad \hat{V}(x) = \hat{V}(x+a)\ .$$

a) Wir definieren uns zunächst den Translationsoperator $\hat{T}(x_0)$ mit der Eigenschaft, dass $\hat{T}(x_0)\psi(x) = \psi(x-x_0)$ für Wellenfunktionen $\psi(x)$ gilt. Zeigen Sie, dass der Translationsoperator $\hat{T}(x_0)$ unitär ist und geben Sie eine explizite Form dieses Operators an.

(2 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Werte von x_0, sodass der Translationsoperator $\hat{T}(x_0)$ mit dem gegebenen Hamiltonoperator $\hat{H}$ vertauscht.

(1 Punkt)

c) Zeigen Sie nun das Bloch Theorem. Es besagt, dass die Energieeigenfunktionen $\varphi_E(x)$ des Hamiltonoperators $\hat{H}$ stets so gewählt werden können, dass

$$\hat{T}(a)\varphi_E(x) = \mathrm{e}^{iKa}\varphi_E(x) \quad \text{mit einer Konstanten } K \in \mathbb{R} \tag{1}$$

gilt.
<u>*Hinweis*</u>: Wir nehmen an, dass die Energieeigenräume endlich dimensional sind.

(2 Punkte)

d) Wir kompaktifizieren nun unsere periodische Konfiguration auf einem Kreis. Dies bedeutet wir identifizieren $x + Na \sim x$, wobei N eine (große) positive ganze Zahl ist.. Bestimmen Sie nun die möglichen Werte der Konstanten K in Gleichung (1).

(1 Punkt)

Als ein mögliches periodisches Potential auf einem Kreis wählen wir eine Konfiguration aus N δ-Peaks, gegeben durch

$$V(x) = V_0 \sum_{n=0}^{N-1} \delta(x - na)\ . \tag{2}$$

e) Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung für das Potential (2) und bestimmen Sie die transzendente Gleichung

$$\cos(Ka) = \cos(\kappa a) + \frac{mV_0}{\hbar^2 \kappa} \sin(\kappa a) \quad \text{mit } \kappa = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{3}$$

zur Energiequantisierung auf.
<u>*Hinweis*:</u> Lösen Sie zunächst die Schrödingergleichung in einem Abschnitt. Verwenden Sie sowohl geeignete Randbedingungen der Wellenfunktion $\varphi_E(x)$ als auch das Bloch Theorem, um die transzendente Gleichung (3) zu berechnen.

(3 Punkte)

f) Bestimmen Sie graphisch die Energieeigenwerte. Beschreiben Sie qualitativ die auftauchende Verteilung der Energieeigenwerte im Grenzfall $N \longrightarrow \infty$.
<u>*Hinweis*:</u> Zeichnen Sie beide Seiten der Gleichung (3) gemeinsam in einen Graphen und bestimmen Sie mögliche Schnittpunkte.

(+2 Bonuspunkte)

Anmerkung

Das berechnete Spektrum der Energieeigenwerte dieses Models beschreibt qualitativ die typische Bandstruktur von Elektronen im Festkörper. Die einzelnen Energiebänder der Elektronenzustände sind durch Energiebereiche („Gaps“) getrennt, in denen keine Elektronenzustände auftauchen.