

## Quantenmechanik

Dr. Hans Jockers und Christoph Nega

<http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/quantenmechanik/index.php>

Abgabedatum: 31.05.2019

–HAUSAUFGABEN–

### 9.1 Matrixdarstellung

Gegeben sei ein Operator  $\hat{M}$  mit der Matrixdarstellung

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Entscheiden Sie, ob es sich bei dem Operators  $\hat{M}$  um einen hermiteschen/unitären Operator handelt. Begründen Sie Ihre Antwort.

(0,5 Punkte)

- b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von  $\underline{M}$ . Diagonalisieren Sie  $\underline{M}$  und geben Sie an, wie der Operator in der Basis der Eigenvektoren wirkt.

(1 Punkt)

- c) Wir definieren den Operator  $\hat{N} = e^{i\hat{M}t}$  mit  $t \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass  $\hat{N}$  ein unitärer Operator ist. Berechnen Sie außerdem explizit die Matrix  $\underline{N}$ .

(0,5 Punkte)

### 9.2 Bra-Ket-Notation

Gegeben sei ein 3-dimensionaler, komplexer Hilbertraum  $\mathcal{H}$  mit orthonormalen Basis  $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ .

- a) Im Vektorraum  $\mathcal{H}$  seien die zwei Kets  $|\psi_1\rangle = i|1\rangle - 3|2\rangle - 2i|3\rangle$  und  $|\psi_2\rangle = 2i|1\rangle + 2|3\rangle$  gegeben.

(i) Geben Sie die Bra-Vektoren zu  $|\psi_1\rangle$  und  $|\psi_2\rangle$  an.

(ii) Berechnen Sie die inneren Produkte  $\langle\psi_a|\psi_b\rangle$  für  $a, b = 1, 2$ .

(iii) Berechnen Sie die Matrixelemente der Operatoren  $\hat{A} = |\psi_1\rangle\langle\psi_2|$  und  $\hat{B} = \frac{1}{14}|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ . Bestimmen Sie, bei welchen der beiden Operatoren es sich um Projektionsoperatoren handelt. Falls es sich um einen Projektionsoperator handelt, geben Sie eine Basis des Unterraumes und eine Basis des orthogonalen Komplements an.

(2 Punkte)

- b) Seien  $\hat{P}_1$  und  $\hat{P}_2$  zwei Projektionsoperatoren auf die Unterräume  $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$  bzw.  $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}$ . Zeigen Sie, dass  $\hat{P} = \hat{P}_1 \hat{P}_2$  genau dann ein Projektionsoperator ist, wenn  $[\hat{P}_1, \hat{P}_2] = 0$  gilt. Geben Sie an, auf welchen Unterraum  $\hat{P}$  projiziert.

(2 Punkte)

- c) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte eines unitären Operators Betrag eins haben. Entscheiden Sie, ob es außer dem Identitätsoperator weitere Operatoren geben kann, die sowohl unitär als auch hermitesch sind. Geben Sie gegebenenfalls Beispiele an.

(1 Punkt)

Seien nun zwei Operatoren  $\hat{L}_z$  und  $\hat{S}$  gegeben, welche wie folgt auf die Basisvektoren einer orthonormalen Basis  $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$  wirken

$$\begin{aligned}\hat{L}_z |1\rangle &= |1\rangle, & \hat{L}_z |2\rangle &= 0, & \hat{L}_z |3\rangle &= -|3\rangle, \\ \hat{S} |1\rangle &= |3\rangle, & \hat{S} |2\rangle &= |2\rangle, & \hat{S} |3\rangle &= |1\rangle.\end{aligned}$$

- d) Geben Sie die Matrixdarstellungen der Operatoren  $\hat{L}_z, \hat{L}_z^2, \hat{S}$  und  $\hat{S}^2$  in der obigen Basis an. Geben Sie zusätzlich an, welche der Operatoren hermitesch sind.

(1 Punkt)

- e) Bestimmen Sie für die Operatoren  $\hat{L}_z, \hat{L}_z^2, \hat{S}$  und  $\hat{S}^2$  die jeweils allgemeinste hermitesche Matrix, die mit dem jeweiligen Operator vertauscht.

(1 Punkt)

- f) Berechnen Sie eine gemeinsame Eigenbasis der Operatoren  $\hat{L}_z^2$  und  $\hat{S}$ . Geben Sie an, ob es sich bei den beiden Operatoren um einen vollständigen Satz von Operatoren handelt.

(2 Punkte)

- g) Wiederholen Sie die Betrachtung aus Teil g) für die Operatoren  $\hat{L}_z$  und  $\hat{S}^2$ .

(1 Punkt)

### 9.3 Das Heisenberg-Bild

In der Vorlesung wurde das Heisenberg-Bild eingeführt, in dem Zustände  $|\psi\rangle_H$  zeitlich konstant gewählt werden, wohingegen im Schrödinger-Bild Zustände  $|\psi(t)\rangle_S$  explizit zeitabhängig sind. Im Schrödinger-Bild erfüllen die zeitabhängigen Zustände  $|\psi(t)\rangle_S = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$  die Schrödingergleichung, wobei  $\hat{U}(t, t_0)$  der Zeitentwicklungsoperator ist. Wirkt ein Operator  $\hat{A}_S$  im Schrödinger-Bild auf den Zustand  $|\psi(t)\rangle_S$  wie

$$\hat{A}_S |\psi(t)\rangle_S = \hat{A}_S \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle,$$

dann operiert der korrespondierende Operator  $\hat{A}_H(t)$  im Heisenberg-Bild, gegeben durch

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{A}_S \hat{U}(t, t_0),$$

auf die zeitunabhängigen Zustände  $|\psi\rangle_H = |\psi(t_0)\rangle$ .

- a) Zeigen Sie, dass die Operatoren  $\hat{A}_H(t)$  die Heisenbergsche Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) = \dot{\hat{A}}_H(t) + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_H(t), \hat{A}_H(t)] \quad \text{mit} \quad (1)$$

$$\dot{\hat{A}}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \frac{\partial \hat{A}_S}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) \quad \text{und} \quad \hat{H}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{H}_S(t) \hat{U}(t, t_0)$$

erfüllen.

(2 Punkte)

- b) Gegeben sei ein Hamiltonoperator  $\hat{H}_S$ , der nicht explizit zeitabhängig ist, also  $\frac{\partial \hat{H}_S}{\partial t} = 0$ . Zeigen Sie dann, dass dieser Operator im Heisenberg-Bild und im Schrödinger-Bild die selbe Form hat, das heißt,  $\hat{H}_H = \hat{H}_S$ .

(1 Punkt)

Wir betrachten nun ein Teilchen der Masse  $m$  und Ladung  $q$  in einem konstanten elektromagnetischen Feld  $\vec{E}$ . Dieses System wird durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H}_S = \frac{|\hat{p}_S|^2}{2m} - q(\vec{E} \cdot \hat{x}_S)$$

beschrieben. Die Operatoren  $\hat{p}_S$  und  $\hat{x}_S$  sind dabei zeitunabhängig.

- c) Zeigen Sie explizit, dass der Impulsoperator im Heisenberg-Bild gegeben ist durch

$$\hat{p}_H(t) = \hat{p}_S + q(t - t_0)(\vec{E} \cdot \hat{1}) .$$

(2 Punkte)

## 9.4 Drehimpulsoperator und Drehimpulsalgebra

Der Bahndrehimpulsoperator in der Quantenmechanik wurde bereits in der Vorlesung eingeführt

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{p}} \quad \text{bzw.} \quad \hat{L}_k = \sum_{i,j} \epsilon_{ijk} \hat{x}_i \hat{p}_j .$$

Wir möchten nun einige Kommutatorrelation, welche in der Vorlesung nur genannt wurden, ausrechnen.

- a) Zeigen Sie, dass der Bahndrehimpuls die Algebra  $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = \sum_k i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{L}_k$  erfüllt. Ferner zeigen Sie, dass die Algebra auch in der Form  $\hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{L}} = i\hbar \hat{\vec{L}}$  geschrieben werden kann.

(1 Punkt)

Neben dem Bahndrehimpulsoperator  $\hat{\vec{L}}$  wurde auch dessen Betragsquadrat  $|\hat{\vec{L}}|^2 = (\hat{L}_x)^2 + (\hat{L}_y)^2 + (\hat{L}_z)^2$  als ein weiterer Operator eingeführt. Außerdem wurden die sogenannten Leiteroperatoren

$$\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$$

definiert.

- b) Beweisen Sie, dass der Operator  $|\hat{\vec{L}}|^2$  mit jeder Komponente des Bahndrehimpulsoperators  $\hat{L}_i$  vertauscht. Dies bedeutet, dass  $|\hat{\vec{L}}|^2$  mit einer Komponente von  $\hat{\vec{L}}$ , konventionell wird hier  $\hat{L}_z$  verwendet, einen Satz von kommutierenden Operatoren bildet.

(0,5 Punkte)

- c) Zeigen Sie, dass  $\hat{L}_{\pm}^{\dagger} = \hat{L}_{\mp}$ . Bestimmen Sie außerdem die Algebra der Leiteroperatoren, das heißt, berechnen Sie den Kommutator  $[\hat{L}_{+}, \hat{L}_{-}]$ .

(0,5 Punkte)

- d) Berechnen Sie abschließend die Kommutatoren  $[\hat{L}_z, \hat{L}_{\pm}]$  und  $[\hat{L}_z, |\hat{\vec{L}}|^2]$ .

(1 Punkt)