
Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Prof. Dr. Albrecht Klemm
Christoph Nega, Fabian Fischbach

Abgabe: Di. 23.01.2018 (in der Vorlesung)

<http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/statphyws1718/index.php>

–HAUSAUFGABEN–

H.11.1 Wiensches Verschiebungsgesetz (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Maximum der Planckschen Energieverteilung $u(\omega)$ bei $\omega_{\max} \propto k_B T / \hbar$ liegt, wobei die Proportionalitätskonstante $\sim 2,82$ ist.

H.11.2 Oberflächentemperatur der Sonne (2 Punkte)

Der Energiefluss, der von der Sonne auf die Erde trifft, beträgt $b = 0,136 \text{ J s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$ (ohne Absorptionsverluste, bei senkrechtem Einfall). Die Konstante b heißt auch Solarkonstante.

Hinweis: Sonnenradius $R_S = 7 \cdot 10^{10} \text{ cm}$, Abstand Sonne - Erde $R_{SE} = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ cm}$

- a) Zeigen Sie, dass die gesamte Sonnenabstrahlung $\sim 4 \cdot 10^{26} \text{ J s}^{-1}$ ist. (1 Punkt)
- b) Berechnen Sie die Oberflächentemperatur der Sonne unter der Annahme, dass die Sonne wie ein schwarzer Körper strahlt. (1 Punkt)

H.11.3 Thermisches Photonengas (10 Punkte)

Wir betrachten ein thermisches Photonengas mit der Energie-Impuls-Beziehung $E = |p|c$. Die Zustandsdichte für ein solches Gas ist gegeben durch¹

$$\rho(E) = \frac{VE^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3}. \quad (1)$$

- a) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme sowie das großkanonische Potential des Photonengases. Was gilt dabei für μ ?
Sie sollten folgendes Ergebnis erhalten

$$\Phi = -\frac{\pi^2 k_B^4}{45 \hbar^3 c^3} VT^4. \quad (2)$$

Hinweis: $\int_0^\infty dx x^2 \log(1 - e^{-x}) = -\frac{\pi^4}{45}$ (3 Punkte)

¹In der Zustandsdichte wurde bereits ein Faktor 2 für den Polarisationsfreiheitsgrad berücksichtigt.

- b) Berechnen Sie nun die mittlere Photonenzahl N .
Sie sollten folgendes Ergebnis erhalten

$$N = 0,244 \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 V . \quad (3)$$

Hinweis: $\frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x - 1} \approx 0,244$

(3 Punkte)

- c) Berechnen Sie aus dem großkanonischen Potential die Entropie S sowie die innere Energie E . Die Temperaturabhängigkeit der inneren Energie des Photonengases heißt *Stefan-Boltzmann-Gesetz*.

Hinweis: Vergleichen Sie die freie Energie mit dem großkanonischen Potential.

(2 Punkte)

- d) Verwenden Sie geeignete thermodynamische Ableitungen, um die thermische Zustandsgleichung zu berechnen. Bestimmen Sie hierzu den Druck P , auch Strahlungsdruck genannt, bei der Temperatur T . Hängt der Druck vom Volumen V ab? Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.

(1 Punkt)

- e) Betrachten Sie nun abschließend die adiabatische Zustandsgleichung. Hierzu schauen wir uns Zustandsänderungen an, bei denen sich das Volumen ohne Wärmeaustausch ändert, d.h. $dS = 0$. Was gilt hierbei für die Änderung der Photonenzahl N ?

Stellen Sie hiermit die Zusammenhänge $T(V)$ sowie $P(V)$ für die adiabatische Zustandsänderung her. Eine adiabatische Ausdehnung erfolgt z.B. bei der Expansion des frühen Universums, seit das Photonengas von der Wechselwirkung mit Materie abgekoppelt war.

Hinweis: Vergleichen Sie (b) und (c).

(1 Punkt)

H.11.4 Zweiatomiges Molekül (12 Punkte)

Ein zweiatomiges Molekül besitzt Translations-, Schwingungs- und Rotationsfreiheitsgrade. Es soll die spezifische Wärme eines idealen Gases von N derartigen Molekülen berechnet werden. Der Beitrag der Translationsbewegung ist $C_V^{\text{transl}} = \frac{3}{2} N k_B$.

- a) Die Energieniveaus der Schwingungszustände des Moleküls sind

$$E_n^{\text{osz}} = \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Berechnen Sie die Zustandssumme Z_C^{osz} , die innere Energie E^{osz} und die spezifische Wärme C_V^{osz} für den Schwingungsfreiheitsgrad. Was ergibt sich für hohe bzw. tiefe Temperaturen? Erstellen Sie hierzu eine Skizze.

(4 Punkte)

- b) Die Rotationsenergieniveaus des Moleküls sind gegeben durch

$$E_l^{\text{rot}} = \frac{J^2}{2I} , \quad J^2 = \hbar^2 l(l+1) , \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

wobei I das Trägheitsmoment ist. Geben Sie die Zustandssumme Z_C^{rot} für den Rotationsanteil an.

Hinweis: Beachten Sie die Entartung der Drehimpulszustände. Für hohe Temperaturen können Sie die Euler-MacLaurin Formel² verwenden. Für tiefe Temperaturen reicht es, wenn Sie die ersten zwei Terme der Summe berechnen.

(3 Punkte)

- c) Berechnen Sie für die beiden Grenzfälle aus dem vorherigen Aufgabenteil die spezifische Wärme C_V^{rot} .

(3 Punkte)

- d) Zeigen Sie qualitativ, dass $E^{\text{rot}} \ll E^{\text{osz}}$ und skizzieren Sie detailliert die spezifische Wärme $C_V = C_V^{\text{transl}} + C_V^{\text{osz}} + C_V^{\text{rot}}$ eines derartigen Gases als Funktion der Temperatur.

(2 Punkte)

²Verwenden Sie hier die folgenden Terme aus der Euler-MacLaurin Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \approx \int_0^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{12}f'(0) + \frac{1}{720}f^{(3)}(0). \quad (6)$$

Die Euler-MacLaurin Formel wurde bereits in A.2.1 gezeigt.