Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Prof. Dr. Albrecht Klemm
Christoph Nega, Fabian Fischbach

Besprechung: Fr. 02.02.2018 (in der Vorlesung)

`http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/statphyws1718/index.php`

–Hausaufgaben–

H.12.1 Kühlung durch adiabatische Entmagnetisierung

Wir betrachten in dieser Aufgabe ein 3-Niveausystem aus N nicht miteinander wechselwirkenden Spins, welche an ein äußeres Magnetfeld B koppeln. Der Hamiltonoperator für dieses System ist gegeben durch

$$H = -\mu B \sum_{i=1}^{N} s_i \ , \quad \text{mit } s_i = -1, 0, 1 \ . \tag{1}$$

a) Berechnen Sie zuerst die Entropie des Systems, indem Sie die kanonische Zustandssumme aufstellen.
Hierbei sollten Sie

$$S(B,T) = N k_\mathrm{B} \left[\log\left(2\cosh\left(\frac{\mu_0 B}{k_\mathrm{B} T}\right) + 1 \right) - \frac{\mu_0 B}{k_\mathrm{B} T} \frac{2\sinh\left(\frac{\mu_0 B}{k_\mathrm{B} T}\right)}{2\cosh\left(\frac{\mu_0 B}{k_\mathrm{B} T}\right) + 1} \right] \tag{2}$$

erhalten.

b) Das Spinsystem werde nun bei einer Magnetfeldstärke $B_1 > 0$ durch Kopplung an ein Wärmebad auf die Temperatur $T_1 > 0$ gebracht und anschließend wärmeisoliert. Ändert man nun das Magnetfeld auf einen neuen Wert $B_2 > 0$, so verläuft dieser Prozess adiabatisch. Was folgt daraus für die Entropie?

c) Offensichtlich hängt die Entropie nur vom Verhältnis von Magnetfeld und Temperatur ab, $S(B,T) = S(B/T)$. Zeigen Sie, dass S als Funktion von $|B/T|$ injektiv ist. Was gilt also für die Temperatur T_2, die das Spinsystem nach der Magnetfeldänderung besitzt? Wie müssen Sie B_2 wählen, damit das Spinsystem abgekühlt wird, also $T_2 < T_1$ gilt?
Hinweis: Nehmen Sie an, dass sich die Temperatur stetig mit dem Magnetfeld ändert.

d) Das Spinsystem sei nun über einen Wärmeleiter mit einer Probe mit konstanter Wärmekapazität C_V^{Probe} verbunden, welche zuvor ebenfalls durch das Wärmereservoir auf die Temperatur T_1 gebracht wurde. Berechnen Sie die Temperatur $T_=$, die Spinsystem und Probe nach dem Temperaturausgleich besitzen. Berechnen Sie dazu zuerst die spezifische

Wärme des Spinsystems.
Hierbei sollten Sie

$$C_B(T) = N k_{\mathrm{B}} \left(\frac{\mu_0 B}{k_{\mathrm{B}} T}\right)^2 \frac{2\cosh\left(\frac{\mu_0 B}{k_{\mathrm{B}} T}\right) + 4}{\left(2\cosh\left(\frac{\mu_0 B}{k_{\mathrm{B}} T}\right) + 1\right)^2} \tag{3}$$

erhalten.
Hinweis: Wenn Sie die spezifische Wärme ausgerechnet und Gleichung (3) erhalten haben, können Sie in der anschließenden Rechnung von $k_{\mathrm{B}} T \gg \mu_0 B_2$ ausgehen. Nähern Sie dementsprechend die Wärmekapazität des Spinsystems.

H.12.2 Pauli-Paramagnetismus

In dieser Aufgabe betrachten wir ein freies Elektronengas mit der Energie-Impuls-Beziehung $\varepsilon_p = \frac{p^2}{2m}$ und dem chemischen Potential $\mu \approx \varepsilon_F$ bei der Temperatur T. Die Zustandsdichte $\nu(\varepsilon)$ wurde bereits in H.10.1 berechnet; zur Erinnerung

$$\nu(\varepsilon) = \frac{3}{2} N \frac{\varepsilon^{1/2}}{\varepsilon_F^{3/2}} \ . \tag{4}$$

Nun wird ein Magnetfel B angelegt.

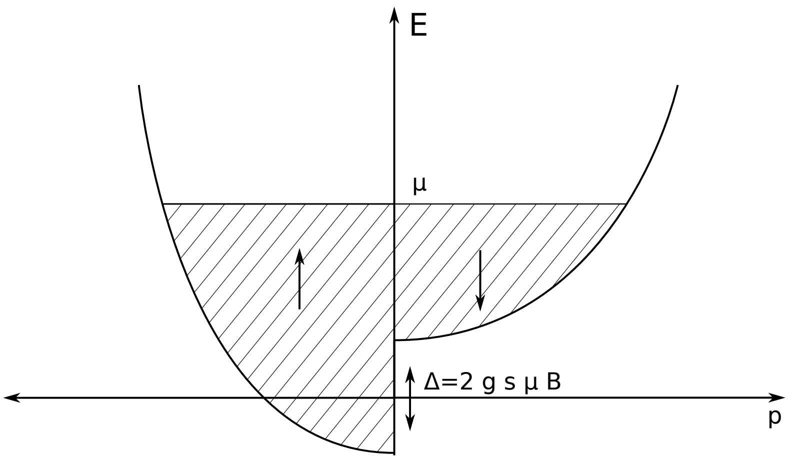

Abbildung 1: Energie-Impuls-Beziehung mit angelegtem Magnetfeld.

a) Geben Sie die Energieeigenwerte $\varepsilon_{p,\sigma}$ eines Elektrons mit Impuls $\vec{p}$ und Spin $\sigma = \pm\frac{1}{2}$ an. Berechnen Sie ferner die großkanonische Zustandssumme.
Bezeichnen Sie hierbei den Landé-Faktor mit g und das Bohrsche Magneton mit μ_B.

b) Bestimmen Sie das großkanonische Potential Φ in Gegenwart des Magnetfeldes B und berechnen Sie danach die Tieftemperaturentwicklung von Φ bis $\mathcal{O}(T^2)$.
Hinweis: Für Φ reicht ein allgemeiner Ausdruck. Verwenden Sie die Sommerfeld-Entwicklung für das Tieftemperaturverhalten.

c) Berechnen Sie die Teilchenzahlen $N_\uparrow$ und $N_\downarrow$ der Elektronen für $\sigma = \pm\frac{1}{2}$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis anhand der Abbildung.
Hinweis: Auch hier reicht ein allgemeines Ergebnis aus.

d) Berechnen Sie die Magnetisierung M des Systems als thermodynamische Ableitung bei fester Temperatur und festem chemischem Potential. Bestimmen Sie auch hier das Tieftemperaturverhalten von $M(T)$ bis $\mathcal{O}(T^2)$.

e) Bestimmen Sie die magnetische Suszeptibilität $\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_{T,\mu}$ für $B \to 0$ zunächst allgemein und dann für tiefe Temperaturen bis $\mathcal{O}(T^2)$. Skizzieren Sie $\lim_{B\to 0} \chi(T)$.

f) Wie müssten Sie Ihre Rechnung ändern, um die Magnetisierung nicht bei festem chemischem Potential μ, sondern bei fester Gesamtteilchenzahl $N = N_\uparrow + N_\downarrow$ zu berechnen?

H.12.3 Zum eindimensionalen Ising-Modell

Betrachten Sie eine zu einem Ring geschlossene eindimensionale Kette von Spins $\sigma_k \in \{\pm 1\}$ mit $k = 1, \ldots, N$ und periodischer Randbedingung $\sigma_{N+1} = \sigma_1$ (Ising-Kette). Der Hamiltonoperator der Spinkette in einem homogenen äußeren Magnetfeld B sei

$$H = -J \sum_{j=1}^{N} \sigma_j \sigma_{j+1} - B \sum_{j=1}^{N} \sigma_j \ . \tag{5}$$

a) Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme Z_N für N Spins mit Magnetfeld B

$$Z_N(B,T) = \mathrm{Tr}\ T^N \tag{6}$$

ist, wobei T die sogenannte Transfermatrix mit den Matrixelementen

$$\langle \sigma | T | \sigma' \rangle = \exp\left(\beta \left[J\sigma\sigma' + \frac{B}{2}\left(\sigma + \sigma'\right)\right]\right) \tag{7}$$

ist.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte von T und werten Sie die Zustandssumme explizit aus.

c) Was erhält man für Z_N im thermodynamischen Limes $N \to \infty$?

d) Berechnen Sie die freie Energie $\frac{1}{N} F_N(B,T)$ und die mittlere Magnetisierung $\frac{1}{N} M_N(B,T) = -\frac{1}{N}\left(\frac{\partial F_N}{\partial B}\right)_{N,T}$ im thermodynamischen Limes $N \to \infty$.

e) Gibt es im eindimensionalen Ising-Modell spontane Magnetisierung? Wie verhält sich also M_N, wenn man das Magnetfeld B abschaltet?