
Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Prof. Dr. Albrecht Klemm
Christoph Nega, Fabian Fischbach

Abgabe: Di. 14.11.2017 (in der Vorlesung)

<http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/statphyws1718/index.php>

–HAUSAUFGABEN–

H.4.1 Spin- $\frac{1}{2}$ -Paramagnet (15 Punkte)

In dieser Aufgabe möchten wir uns ein System aus Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen anschauen. Das System bestehe aus N Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen in einem Magnetfeld H . Hierbei können die Teilchen jeweils in den zwei Zuständen $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ auftreten.

Der Hamilton-Operator für dieses System ist gegeben durch

$$\hat{H} = -h \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_i, \quad \text{mit } \hat{\sigma}_i |\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \text{ und } \hat{\sigma}_i |\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle. \quad (1)$$

- a) Zunächst möchten wir die Anzahl der Zustände mit der Energie E bestimmen. Berechnen Sie hierzu

$$\Omega(E) = \sum_{\{\sigma_1, \dots, \sigma_N = \pm 1\}} \delta \left(E + h \sum_{i=1}^N \sigma_i \right). \quad (2)$$

Hinweis: Drücken Sie die Delta-Distribution durch ein Integral aus.

(3 Punkte)

Erhalten sollten Sie hierbei ein Integral der Form

$$\sim \int \frac{dk}{2\pi} e^{f(k)} \quad \text{mit } f(k) = ikE + N \log \cos(kh). \quad (3)$$

- b) Berechnen Sie dieses Integral mit Hilfe der Laplace-Methode. Entwickeln Sie hierfür die Funktion $f(k)$ bis zur zweiten Ordnung um ihr Extremum. Verwenden Sie außerdem $e := \frac{E}{Nh}$.

(3 Punkte)

- c) Berechnen Sie aus der Anzahl der Zustände die Entropie des Systems. Berücksichtigen Sie nur die am Ende linearen Terme in N .

(2 Punkte)

- d) Bestimmen Sie aus der Entropie den Ausdruck für die Temperatur des Systems. Diskutieren Sie das Verhalten der Temperatur, indem Sie $E \rightarrow \pm Nh$ und $E \rightarrow 0$ analysieren. (2 Punkte)

Bisher haben wir uns den Spin- $\frac{1}{2}$ -Paramagneten im Formalismus des mikrokanonischen Ensembles angeschaut. Nun möchten wir das System mit Hilfe des kanonischen Ensembles diskutieren. Die Energie des Paramagneten ist gegeben durch

$$E = -h \sum_{i=1}^N \sigma_i, \quad (4)$$

wobei der Parameter h über $h = -\mu_B H$ mit dem externen Magnetfeld zusammenhängt.

- e) Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme Z für den Spin- $\frac{1}{2}$ -Paramagneten. (2 Punkte)
- f) Berechnen Sie die Magnetisierung, welche durch

$$M = \left\langle \sum_{i=1}^N \mu_B \sigma_i \right\rangle \quad (5)$$

gegeben ist. Wie skaliert $\frac{\partial M}{\partial H}$ mit der Temperatur für $T \rightarrow \infty$?

(3 Punkte)

H.4.2 Die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung (5 Punkte)

Wir betrachten ein klassisches, nicht-relativistisches Gas aus N identischen Teilchen der Masse m , welches in einem Gefäß des Volumens V eingeschlossen sei. Das Gas stehe ferner im thermischen Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T und definiert daher eine kanonische Gesamtheit mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho_{\text{kan.}}(q, p) = (N! h^{3N} Z)^{-1} e^{-\beta H(q, p)} \quad (6)$$

$$Z(\beta, N, V) := (N! h^{3N})^{-1} \iint e^{-\beta H(q, p)} d^{3N} q d^{3N} p, \quad (7)$$

wobei $\beta = 1/(k_B T)$ im Boltzmann-Faktor $\exp(-\beta H)$ gesetzt wurde und $\rho_{\text{kan.}}$ auf eins normiert ist. Unter Vernachlässigung von Wechselwirkungen gilt im Gefäßinneren

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + U(q_1, \dots, q_N) \quad \text{mit} \quad U(q_1, \dots, q_N) = 0 \quad (8)$$

und $U(q_1, \dots, q_N) = \infty$ außerhalb (im distributionellen Sinne).

- a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z .

Hinweis: In Kugelkoordinaten können Sie bekannte Ergebnisse für Gauß-Integrale verwenden.

(1 Punkt)

Wir bestimmen nun die Wahrscheinlichkeit $w(p)dp$ ein ausgewähltes Teilchen i mit Impulsbetrag $p := |\vec{p}_i|$ im Intervall $[p, p + dp]$ zu finden.

b) Berechnen Sie $w(p)$ aus $\rho_{\text{kan.}}$, indem Sie alle Freiheitsgrade außer p ausintegrieren und die resultierende Wahrscheinlichkeitsdichte korrekt normieren.

(1 Punkt)

c) Sie erhalten hieraus eine Geschwindigkeitsverteilung $f(v) dv$, zu der Sie nun die wahrscheinlichste Geschwindigkeit (Maximum von f) sowie die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ berechnen.

(2 Punkte)

d) Skizzieren Sie die Geschwindigkeitsverteilung.

(1 Punkt)