Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Prof. Dr. Albrecht Klemm
Christoph Nega, Fabian Fischbach

Abgabe: Di. 21.11.2017 (in der Vorlesung)

`http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/statphyws1718/index.php`

–Hausaufgaben–

H.5.1 Gemisch zweier idealer Gase (8 Punkte)

Wir betrachten ein Gemisch zweier idealer (nicht wechselwirkender) Gase in einem Volumen V. Das Gemisch stehe im Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T. Die Gasteilchenbesitzen die Masse m_1 bzw. m_2.

a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z_\mathrm{K}(T, V, N_1, N_2)$ für zunächst feste Teilchenzahlen N_i. Drücken Sie das Ergebnis durch die thermischen Wellenlängen aus, die durch $\lambda_i = h/\sqrt{2\pi m_i k_\mathrm{B} T}$ definiert sind.

(2 Punkte)

b) Im Folgenden wird auch der Teilchenaustausch mit dem Wärmebad zugelassen. Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme

$$Z_\mathrm{GK}(T, V, \mu_1, \mu_2) = \sum_{N_1=0}^{\infty} \sum_{N_2=0}^{\infty} Z_\mathrm{K}(T, V, N_1, N_2)\, \mathrm{e}^{\beta(\mu_1 N_1 + \mu_2 N_2)} , \tag{1}$$

wobei nun jede Teilchensorte i ein eigenes chemisches Potential μ_i besitzt. Drücken Sie ihr Ergebnis durch die Fugazitäten $z_i = \exp(\beta\mu_i)$ aus.

(1 Punkt)

c) Durch geeignete Ableitungen nach den Zustandsvariablen des großkanonischen Potentials

$$\Phi(T, V, \mu_1, \mu_2) = -k_\mathrm{B} T \log Z_\mathrm{GK} \tag{2}$$

berechnen Sie ferner den Druck P und die (mittleren) Teilchenzahlen N_i des Gemisches.

(1 Punkt)

d) Folgern Sie die thermische Zustandsgleichung

$$PV = k_\mathrm{B} T (N_1 + N_2) \ . \tag{3}$$

(1 Punkt)

e) Auf ähnliche Weise berechnen Sie die Entropie S des Gemisches.

(2 Punkte)

f) Nutzen Sie Ihre Ergebnisse, um für die innere Energie des Systems

$$E = \Phi + TS + (\mu_1 N_1 + \mu_2 N_2) \tag{4}$$

die Aussage

$$E = \frac{3}{2}(N_1 + N_2) k_\mathrm{B} T \tag{5}$$

zu zeigen.

(1 Punkt)

H.5.2 Polymer-Modell (7 Punkte)

Wir beschreiben ein Polymer idealisiert durch eine lineare Kette von N Gliedern, welche je einen knickbaren Abschnitt besitzen. Die mikroskopischen Eigenschaften der Kette seien dabei wie folgt charakterisiert:

Energie eines Kettengliedes:	ε_-	(ungeknickt)
	$\varepsilon_\wedge$	(geknickt)
Länge eines Kettengliedes:	ℓ_-	(ungeknickt)
	$\ell_\wedge < \ell_-$	(geknickt).

a) Berechnen Sie für festgehaltene Länge L die kanonische Zustandssumme

$$Z_\mathrm{K}(T, L, N) = \sum_{\text{Zustände } n} e^{-\beta E_n} \ . \tag{6}$$

<u>*Hinweis:*</u> Beachten Sie, dass L, N und die Zahl der geknickten Glieder $n_\wedge$ nicht unabhängig sind und deshalb nur über Mikrozustände summiert wird, die der entsprechenden Relation genügen.

(2 Punkte)

b) Die freie Energie ist durch

$$F(T, L, N) = -k_\mathrm{B} T \log Z_\mathrm{K} \tag{7}$$

definiert. Begründen Sie durch Betrachtung des Differentials von F, dass die Kraft K, die auf die Kette wirkt, durch folgenden Ausdruck gegeben ist

$$K = -\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_{T,N} \ . \tag{8}$$

<u>*Hinweis:*</u> Hier wird keine lange Rechnung erwartet. Das Vorzeichen ist Konvention.

(2 Punkte)

c) Bestimmen Sie mit diesem Ergebnis die Kraft $K(T, L, N)$. Gehen Sie dabei vom Grenzfall $N, n_\wedge \gg 1$ aus und schreiben Sie K als Funktion von T, L und N, wobei Sie alle Koeffizienten durch die mikroskopischen Parameter ausdrücken.
<u>*Hinweis:*</u> Verwenden Sie die Näherung $\log x! \approx x \log x$ für $x \gg 1$.

(3 Punkte)