Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Prof. Dr. Albrecht Klemm
Christoph Nega, Fabian Fischbach

Abgabe: Di. 28.11.2017 (in der Vorlesung)
http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/statphyws1718/index.php

–Hausaufgaben–

H.6.1 Ein Fluktuations-Response-Theorem (3 Punkte)

In dieser Aufgabe möchten wir ein sogenanntes Fluktuations-Response-Theorem herleiten, welches einen Zusammenhang zwischen Schwankungen und Suszeptibilitäten beschreibt. In der Vorlesung wurde ein solcher Zusammenhang zwischen der Schwankung der Energie $(\Delta E)^2$ und der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen C_V gezeigt.
Zeigen Sie, dass für die isotherme Kompressibilität und die Schwankung der Teilchenzahl folgende Beziehung gilt:

$$\kappa_T = \frac{V}{N^2}\frac{1}{k_\mathrm{B}T}\,(\Delta N)^2 \ . \tag{1}$$

<u>*Hinweis*</u>: Kapitel 3.3.1 *Fluktuationen* im Lehrbuch von Schwabl zur statistischen Mechanik könnte Ihnen hierbei helfen.

H.6.2 Energiedichte eines thermodynamischen Systems (7 Punkte)

Gegeben sei für feste Teilchenzahl N die Zustandsgleichung

$$PV = \alpha E(T,V) \ , \tag{2}$$

wobei α eine positive Konstante ist.

a) Benutzen Sie die Maxwell-Relation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \ , \tag{3}$$

um die folgende Differentialgleichung für $E(T,V)$ herzuleiten:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = -\frac{\alpha}{V}E + \frac{\alpha T}{V}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \ . \tag{4}$$

(2 Punkte)

b) Verifizieren Sie, dass diese Differentialgleichung durch den Ansatz

$$E(T,V) = \frac{1}{V^\alpha}\ \phi(TV^\alpha) \tag{5}$$

gelöst wird, wobei ϕ eine beliebig differenzierbare Funktion ist.[1]

(1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass die Entropie von der Form $S = \psi(TV^\alpha)$ ist, wobei die Funktion ψ die Eigenschaft $\phi'(x) = x\ \psi'(x)$ besitzt.

(1 Punkt)

d) Wir nehmen nun zusätzlich an, dass die Energiedichte E/V nur von T abhängt. Zeigen Sie, dass in diesem Fall

$$\frac{E}{V} = \sigma T^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \tag{6}$$

gelten muss, wobei σ eine Proportionalitätskonstante ist. Für $\alpha = 1/3$ erhält man daraus das Stefan-Boltzmann-Gesetz

$$\frac{E}{V} = \sigma T^4 \tag{7}$$

für schwarze Strahlung.

(3 Punkte)

H.6.3 Thermodynamische Relationen in magnetischen Systemen (5 Punkte)

Gegeben sei ein (homogenes) magnetisches System im thermodynamischen Gleichgewicht, das im Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T stehe. Paare konjugierter Zustandsvariablen sind hier (S,T) und (H,M), wobei M das magnetische Moment des Systems bezeichnet und H ein von äußeren Quellen erzeugtes Magnetfeld darstellt.[2] Man kann ein thermodynamisches Potential $A(T,M)$ einführen, dessen totales Differential

$$\mathrm{d}A = -S\mathrm{d}T + H\mathrm{d}M \tag{8}$$

lautet.[3]

a) Zeigen Sie zunächst die Maxwell-Relation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T = -\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M . \tag{9}$$

(1 Punkt)

In Analogie zu den spezifischen Wärmen eines Fluids führt man die spezifischen Wärmen

$$C_M := T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M \quad \text{und} \quad C_H := T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H \tag{10}$$

[1] Ohne Beweis bemerken wir, dass dies auch die allgemeine Lösung der vorliegenden partiellen Differentialgleichung ist.

[2] Wir beschränken uns auf eine eindimensionale Betrachtung, indem wir die Parallelität von magnetischem Moment und Magnetfeld annehmen. Des Weiteren werden die Teilchenzahl und das Volumen als fest betrachtet.

[3] Daneben gibt es noch andere thermodynamische Potentiale, die von anderen Variablen abängen.

ein und definiert die isotherme Suszeptibilität

$$\chi_T := \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T \quad \text{sowie} \quad \alpha_H := \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H . \tag{11}$$

Diese Größen genügen der Beziehung

$$C_H - C_M = T\frac{\alpha_H^2}{\chi_T} . \tag{12}$$

b) Beweisen Sie Gleichung (12).
<u>*Hinweis:*</u> Nutzen Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe a) und Anwesenheitsaufgabe A.1.2.
(4 Punkte)