Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Prof. Dr. Albrecht Klemm
Christoph Nega, Fabian Fischbach

Probeklausur

Beachten Sie bitte:

- Die Probeklausur findet am 09.01.2018 von 8:15 bis 10:00 statt.
- Bitte schreiben Sie leserlich.
- Es sind **keine** Hilfsmittel erlaubt.
- Bitte schalten Sie Ihre Handys und andere elektronische Geräte aus.
- Bei Fragen melden Sie sich bitte. Wir werden dann versuchen Ihnen zu helfen.
- Diskussionen mit dem Nachbarn sind **nicht** erlaubt.
- Verwenden Sie bitte für jede neue Aufgabe ein neues Blatt. Schreiben Sie auf alle Blätter Ihren Namen und Matrikelnummer. Nummerieren Sie bitte Ihre Blätter.

Füllen Sie bitte aus:

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Tutor/Gruppe: ______________________________

☐ **BSc Physik PO 2006** ☐ **BSc Physik PO 2014** ☐ **Mathematik** ☐ ____________

Aufgabe	**Max. Punktzahl**	**Erreichte Punktzahl**	**Korrektor**
1	10		
2	10		
3	10		
4	10		
Gesamtpunktzahl	40		

A.1 Quickies (10 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen kurz und ggf. unter Angabe der entsprechenden mathematischen Beziehung.

a) Definieren bzw. erläutern Sie folgende Attribute thermodynamischer Zustandsänderungen:

   i) isobar, isotherm, isochor, adiabatisch

   ii) quasistatisch, reversibel bzw. irreversibel.

   (*2 Punkte*)

b) Geben Sie den ersten und zweiten Hauptsatz der Thermodynamik in differentieller Form an. Geben Sie die korrekte Bezeichnung auftretender Terme an.

   (*1 Punkt*)

c) Wie erhalten Sie aus der inneren Energie $E(S, V, N)$ die freie Energie $F(T, V, N)$? Geben Sie die Differentiale von E und F an. Welche beiden Maxwell-Relationen erhalten Sie aus diesen, wenn N konstant als vorausgesetzt sei?

   (*2 Punkte*)

d) Geben Sie die quantenmechanische mikrokanonische Dichtematrix für ein isoliertes System mit Hamilton-Operator H an.

   (*0,5 Punkte*)

e) Geben Sie die Entropie S eines quantenmechanischen Ensembles gegebener Dichtematrix an.

   (*0,5 Punkte*)

f) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme für ein ideales Gas aus bosonischen bzw. fermionischen Teilchen mit Einteilchenzuständen $|\alpha_i\rangle$ und Energien E_{α_i}.

   (*1 Punkt*)

g) Wie lautet die Fermi-Verteilungsfunktion $n(\varepsilon)$? Skizzieren Sie diese und zeichnen Sie ferner die Verteilungsfunktion ein, die sich im Grenzfall $T \to 0$ hieraus ergibt.

   (*1 Punkt*)

h) Beweisen Sie, dass $n(\varepsilon_\alpha)$ die mittlere Besetzungszahl des Einteilchenzustandes $|\alpha\rangle$ für das ideale Fermi-Gas ist.

   (*2 Punkte*)

A.2 Klassisches ideales Gas (10 Punkte)

Wir betrachten ein ideales Gas (nicht wechselwirkender) Teilchen in einem Volumen V. Das Gas stehe im Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T. Die Gasteilchen haben die Masse m.

a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z(T, V, N)$ für zunächst feste Teilchenzahl N. Drücken Sie das Ergebnis durch die thermische Wellenlänge aus, welche durch $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_\mathrm{B} T}}$ definiert ist.

(2 Punkte)

b) Im Folgenden wird auch der Teilchenaustausch mit dem Wärmebad zugelassen. Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme

$$Z_G(T, V, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} Z(T, V, N)\ \mathrm{e}^{\beta\mu N} \ . \tag{1}$$

Drücken Sie ihr Ergebnis durch die Fugazität $z = \mathrm{e}^{\beta\mu}$ aus.

(1 Punkt)

c) Durch geeignete Ableitungen nach den Zustandsvariablen des großkanonischen Potentials

$$\Phi(T, V, \mu) = -k_\mathrm{B} T \log Z_G \tag{2}$$

berechnen Sie den Druck P und die (mittlere) Teilchenzahl N.

(2 Punkte)

d) Folgern Sie nun die thermische Zustandsgleichung

$$PV = N k_\mathrm{B} T \ . \tag{3}$$

(1 Punkt)

e) Berechnen Sie aus (2) die Entropie S.

(2 Punkte)

f) Zeigen Sie mit Hilfe Ihrer Ergebnisse, dass für die innere Energie des Systems

$$E = \Phi + TS + \mu N \tag{4}$$

die folgende Identität

$$E = \frac{3}{2} N k_\mathrm{B} T \tag{5}$$

gilt.

(2 Punkte)

Nützliche Formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\ \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(a) > 0$$

A.3 Zwei Teilchen in einem harmonischen Potentialtopf (10 Punkte)

Betrachte ein nichtwechselwirkendes System aus zwei identischen, spinlosen Teilchen, die in einem eindimensionalen harmonischen Potentialtopf gebunden sind. Ein einzelnes Teilchen habe also die Energieeigenwerte $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ und $\omega > 0$.

a) Nehmen Sie an, dass die Teilchen <u>unterscheidbar</u> seien. Zeigen Sie zunächst, dass die kanonische Zustandssumme Z_2 in die Einteilchen-Zustandssummen Z faktorisiert. Berechnen Sie anschließend Z_2.

(2 Punkte)

b) Nehmen Sie nun an, dass es sich bei den Teilchen um <u>ununterscheidbare</u> Bosonen handelt. Berechnen Sie nun wiederum die kanonische Zustandssumme Z_2. Machen Sie sich klar, wie in diesem Fall summiert werden muss.
<u>*Hinweis:*</u> Sie sollten am Ende folgenden Ausdruck erhalten:

$$Z_2 = \frac{z}{(1-z)^2(1+z)} \ , \quad z = \mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega} \ , \tag{6}$$

wobei $\beta = \frac{1}{k_\mathrm{B}T}$ mit k_B der Boltzmann-Konstanten und der Temperatur T ist.

(3 Punkte)

c) Berechnen Sie mit Z_2 aus (6) die mittlere Energie $\bar{E} = \langle H \rangle$. Bestimmen Sie das Verhalten der mittleren Energie $\bar{E}$ für die Grenzfälle $T \to 0$ und $T \to \infty$.

(4 Punkte)

d) Bestimmen Sie die Entropie des Zweiteilchensystems im Falle <u>ununterscheidbarer</u> Bosonen.

(1 Punkt)

<u>*Nützliche Formeln:*</u>

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} q^k &= \frac{1}{1-q} \qquad \text{für } |q| < 1 \\ \sum_{k=0}^{N} q^k &= \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \end{aligned} \tag{7}$$

A.4 Der Dieselmotor (10 Punkte)

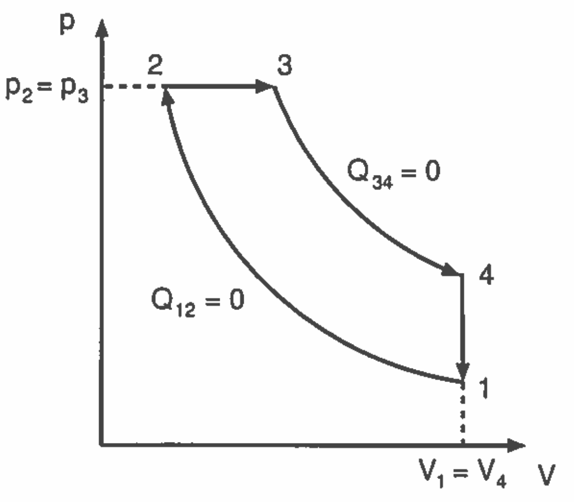

Abbildung 1: Der Dieselkreisprozess: $1 \to 2$ adiabatische Kompression, $2 \to 3$ isobare Vorexpansion, $3 \to 4$ adiabatische Expansion, $4 \to 1$ isochore Abkühlung.

In Abbildung 1 ist der Dieselkreisprozess dargestellt. Als Arbeitsmedium nehmen wir ein ideales Gas an, für das die beiden Zustandsgleichungen

$$E = \frac{f}{2} N k_{\mathrm{B}} T \quad \text{und} \quad PV = N k_{\mathrm{B}} T \tag{8}$$

gelten. Im Folgenden gehen wir von einer konstanten Teilchenzahl N aus.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Zustandsggleichungen (8) und des 1. Hauptsatzes, dass für ein ideales Gas die Wärmekapazitäten bei konstantem Volumen bzw. Druck gegeben sind durch

$$C_V = \frac{f}{2} N k_{\mathrm{B}} \quad \text{und} \quad C_P = \frac{f+2}{2} N k_{\mathrm{B}} \ , \tag{9}$$

wobei $C_X = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_X$ ist.

(3 Punkte)

b) Leiten Sie für eine adiabatische Zustandsänderung, d.h. $\Delta Q = 0$, die Adiabatengleichungen

$$PV^{\kappa} = const. \quad \text{und} \quad TV^{\kappa - 1} = const. \tag{10}$$

her, wobei $\kappa = \frac{C_P}{C_V}$ das Verhältnis der Wärmekapazitäten angibt.

(3 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass sich der Wirkungsgrad $\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_{23}}$ des Dieselprozesses ausdrücken lässt als

$$\eta = 1 - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa - 1} \frac{1 - \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\kappa}}{1 - \left(\frac{V_3}{V_2}\right)} \ . \tag{11}$$

(4 Punkte)