Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Midterm Exam
2.12.2014
WS 14/15

Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm, Jonas Reuter

– Midterm Klausur –

Beachte bitte:

- Dieses Midterm Exam zählt zur Zulassung wie zehn Zettel. Es wird noch einen Weihnachtszettel mit Sonderpunkten geben.
- Bitte leserlich schreiben.
- Bitte das Handy und andere elektronische Geräte ausschalten.
- Bei Fragen bitte melden und nicht an den Nachbarn wenden. Wir werden dann versuchen Dir zu helfen.

1.) Quickies (**40** *Punkte*)

Gib eine kurze Antwort zu den folgenden Fragen/Aufgaben.

(a) Wie lauten die Maxwellgleichungen der Elektrodynamik und was ist ihre physikalische Interpretation? Wie lautet die Kontinuitätsgleichung? Leite sie aus den Maxwellgleichungen her. (**5** *Punkte*)

(b) Wie lautet die Bestimmungsgleichung für ein elektrisches Potential Φ in der Elektrostatik? Wie lässt sich die Lösung mit Hilfe der Greensfunktion schreiben? Welche Randbedingungen können auftreten? (**5** *Punkte*)

(c) Wie lautet die Ladungsdichte ρ einer homogen geladenen Kugel? Bestimme das elektrische Feld $\vec{E}$ innerhalb und außerhalb der Kugel. (**7** *Punkte*)

(d) Wie lautet der Zusammenhang zwischen den Feldern $\vec{E}$ und $\vec{B}$ und ihren Potentialen Φ und $\vec{A}$ in der Elektrodynamik? Was sind allgemein Eichtransformationen? Zeige mit Hilfe der Maxwellgleichungen, dass die Potentiale in Lorentzeichung jeweils der inhomogenen Wellengleichung genügen. (**5** *Punkte*)

(e) Wie lässt sich aus der Elektrodynamik das Coulombgesetz der Elektrostatik herleiten. Welche Eichung ist hierbei zu wählen? Wie sieht die Bestimmungsgleichung für $\vec{A}$ aus? (**4** *Punkte*)

(f) Leite das Biot-Savart Gesetz aus den Maxwellgleichungen her. (**5** *Punkte*)

(g) Zeige, dass die Energie W eines statischen elektrischen Feldes $\vec{E}$ gegeben ist durch

$$W = \frac{1}{8\pi} \int |E(\vec{x})|^2 d^3x \; .$$

(**6** *Punkte*)

(h) Wie sind die Multipolmomente im Fernfeld definiert? Welche Multipolmomente tragen bei einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung bei, welche bei einer zylindersymmetrischen? (**3** *Punkte*)

2.) Punktladung außerhalb einer Metallkugel (**20** *Punkte*)

Eine Punktladung Q sei am Ort $\vec{r}_Q = (0, 0, a)$ ausserhalb einer geerdeten Metallkugel mit Radius R um den Ursprung, auf der das elektrostatische Potential $\Phi = 0$ sein soll.

(a) Zeige, dass

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} - \frac{R}{a} \frac{Q}{|\vec{r} - \frac{R^2}{a^2}\vec{r}_Q|}$$

die Poissongleichung im Aussenraum erfüllt sowie für $\vec{r}$ auf der Kugel $\Phi = 0$ ist. (**5** *Punkte*)

(b) Wie sieht das Potential innerhalb der Kugel aus? Wie kann man das Zustandekommen des Potentials anschaulich interpretieren? (**3** *Punkte*)

(c) Schreibe Φ in Kugelkoordinaten. Kann Φ vom Winkel φ abhängen? (**3** *Punkte*)

(d) Zeige für die Oberflächenladungsverteilung $\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Phi}{\partial r}|_{r=R}$ und berechne sie. (**5** *Punkte*)

(e) Welche Kraft erfährt Q? Was passiert für eine isolierte, d.h. nicht geerdete Kugel? (**3** *Punkte*)

(f) Wie lautet Φ, wenn sich die Ladung innerhalb der Kugel befindet? (**1** *Punkt*)

3.) Ladungsverteilung ohne Azimutalsymmetrie (**20** *Punkte*)

(a) Wie lässt sich $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ in Legendrepolynome ausdrücken? Begründe weiterhin mithilfe des Additionstheorems

$$P_l(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

(α ist der Winkel zwischen den Einheitsvektoren $\vec{e}_r$,$\vec{e}_r'$, d. h. es gilt $\cos(\alpha) = \cos(\theta)\cos(\theta')+\sin(\theta)\sin(\theta')\cos(\phi-\phi')$), dass das durch eine beliebige Ladungsverteilung ρ am Ort $\vec{x}$ erzeugte Potential gegeben ist durch:

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi) \int_0^{\infty} r'^2 dr' \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \int\int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta',\phi')\rho(\vec{x}')\ .$$

(**8** *Punkte*)

(b) Folgere daraus, dass für das Fernfeld einer Ladungsverteilung (d.h. wenn $r > r'$ bleibt) sich das Potential als

$$\Phi(\vec{x})|_{\text{aussen}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi) \frac{Q_{lm}}{r^{l+1}}$$

schreiben lässt, wobei die $Q_{lm} = \int_0^r r'^2 dr' r'^l \int\int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta',\phi')\rho(\vec{r}')$ als Multipolmomente bezeichnet werden. (**5** *Punkte*)

(c) Diskutiere das Nahfeld, d.h. $r < r'$. Wie lauten die Multipolmomente? (**7** *Punkte*)

4.) Magnetisches Feld eines Kreisleiters (**20** *Punkte*)

(a) Berechne das magnetische Moment eines vom Strom I durchflossenen Kreisleiters mit Radius R. (**3** *Punkte*)

(b) Berechne mit dem Biot-Savart Gesetz das Magnetfeld auf der Symmetrieachse des Kreisleiters und vergleiche das Ergebnis mit dem Dipolfeld, welches sich aus (a) ergibt. (**5** *Punkte*)

(c) Vergleiche die Felder eines elektrischen und magnetischen Dipols. Skizziere die Feldlinien des Kreisleiters und einer Punktladungskonfiguration $\pm Q$ an $(0,0,\pm a)$. (**3** *Punkte*)

Betrachte nun eine starre Kugel vom Radius R, auf deren Oberfläche eine Ladung Q gleichförmig verteilt ist und welche mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiert.

(d) Berechne das magnetische Dipolmoment der Kugel. Zerlege dazu die Kugel in dünne Scheiben senkrecht zur Rotationsachse und benutze das Ergebnis aus (a). (**5** *Punkte*)

(e) Die Kugel sei das Modell eines klassischen Elektrons, d.h. der Radius beträgt $R = \frac{e^2}{mc^2}$ und der Drehimpuls (Spin) $S = \Theta\omega = \frac{\hbar}{2}$, wobei $\Theta = \frac{2}{5}mR^2$ das Trägheitsmoment bezeichnet. Vergleiche das in (d) berechnete Dipolmoment mit dem quantentheoretischen Wert $m = g\mu_B S = \frac{e\hbar}{2mc}$. Berechne auch die Rotationsgeschwindigkeit am Äquator. Diskutiere das Ergebnis. (**4** *Punkte*)