Übungen zu Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm, Jonas Reuter

Abgabe: 16.10.2014, Besprechung: 23.10.-24.10.2014

http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/theo2ws1415/

–Anwesenheitsaufgaben–

A 1.1 Wiederholung einiger Begriffe aus der Analysis

Sei $\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine glatte Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist das Gradientenfeld von Φ wie folgt definiert:

$$\operatorname{grad}\Phi(x) = \left(\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x^1}, \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x^n}\right)^T .$$

Ist weiterhin $\vec{e}_i, i = 1, \ldots, n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$,$\vec{V} = \sum_{i=1}^n V^i(x)\vec{e}_i$ ein Vektorfeld, so ist die Divergenz dieses Vektorfeldes als

$$\operatorname{div}\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} V^i(x)$$

definiert.
Wenn $\vec{V} = \nabla\Phi(x)$ ein Gradientenfeld ist, so ist seine Divergenz gleich $\Delta\Phi(x)$, wobei $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial(x^i)^2}$ der Laplace-Operator ist.
Andererseits ist die Rotation eines Vektorfeldes nur dann wieder ein Vektorfeld, wenn die Dimension 3 ist. Im $\mathbb{R}^3$ hat man

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \nabla \wedge \vec{V},$$
$$(\nabla \wedge \vec{V})^i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial V^k}{\partial x^j} .$$

Zeige durch explizites Ausrechnen mit Hilfe des ϵ-Tensors:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{A}) = 0 ,$$
$$\operatorname{rot}\ \operatorname{grad}\Phi(x) = \nabla \wedge \nabla\Phi(x) = 0 ,$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} .$$

A 1.2 Der Satz von Stokes

Es sei $\mathcal{C}$ ein glatter, geschlossener Weg und es sei $F(\mathcal{C})$ eine von $\mathcal{C}$ begrenzte, ebenfalls glatte (orientierbare) Fläche. Für ein glattes Vektorfeld $\vec{V}$, das auf F inklusive seines Randes definiert ist, gilt

$$\int_{F(\mathcal{C})} d\sigma(\nabla \wedge \vec{V}) \cdot \vec{n} = \oint_{\mathcal{C}} d\vec{s} \cdot \vec{V} .$$

Hierbei ist $\vec{n}$ die Flächennormale auf $F(\mathcal{C})$, $d\vec{s}$ ist das gerichtete Linienelement auf $\mathcal{C}$.
Sei $\overrightarrow{F} = (y, x, 0)^T$ ein Vektorfeld auf dem $\mathbb{R}^3$. Zeige zum einen mit Hilfe des Satzes von Stokes und zum anderen explizit die Wegunabhängigkeit des Wegintegrals von $\overrightarrow{F}$ anhand eines Kreisweges auf der $x-y$-Ebene.

A 1.3 Der Satz von Gauss
Es sei F eine glatte, orientierbare, geschlossene Fläche, die in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet ist. Es sei $V(F)$ das von dieser Fläche eingeschlossene Volumen und es sei $\vec{V}$ ein glattes Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{V(F)} d^3x \nabla \cdot \vec{V} = \int_F d\sigma \vec{V} \cdot \vec{n} \ ,$$

wobei $\vec{n}$ die nach Aussen gerichtete Flächennormale am Ort des Flächenelements $d\sigma$ ist.
Sei $\rho(r) = 3Q/(4\pi R^3)\Theta(R-r)$ eine homogene und kugelsymmetrische Ladungsverteilung. Zeige mit Hilfe von $\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ und der Symmetrie:

$$E_{\text{innen}}(r) = \frac{Q}{R^3} r \quad E_{\text{aussen}}(r) = \frac{Q}{r^2}$$

mit $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.

A 1.4 Eigenschaften der Deltadistribution
Diese Aufgabe sammelt einige Rechenregeln für die Diracsche Deltadistribution $\delta[f] = f(0)$, was symbolisch mit der Deltafunktion geschrieben wird:

$$\delta[f] = f(0) =: \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx \ .$$

1. Was ergibt $\delta(x-a)$ und $\delta(ax)$? Was ist $x\delta(x)$?
2. Begründe die Formel $\delta'[f] = -f'(0)$ und verallgemeinere diese.
3. Berechne $\delta(x^2 - a^2)$. Finde und beweise eine Formel für $\delta(g(x))$.

–Hausaufgaben–

H 1.1 Vektoranalysis **5 Punkte**
Zeige folgende Relationen für die Differentialoperatoren div und grad:

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \wedge \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \wedge \vec{b}) \\
&\nabla \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + \vec{a}(\nabla \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\nabla \cdot \vec{a}) \\
&\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \Delta\vec{a} \\
&\nabla \wedge (\phi\vec{a}) = (\nabla\phi) \wedge \vec{a} + \phi\nabla \wedge \vec{a}
\end{aligned}$$

H 1.2 Normierungsfaktor **5 Punkte**

Berechne das folgende Integral, welches als Normierungsfaktor in der Laplacegleichung auftaucht.

$$C = \lim_{a \to 0} \int \nabla^2 \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) d^3x \ .$$

Berechne dazu erst das Integral und führe dann den Grenzwert aus.
Tipp: $\int \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} dx = \frac{x^3}{3y^2(x^2+y^2)^{3/2}}$.