Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übungsblatt 10
18.12.2014
WS 14/15

Übungen zu Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm, Jonas Reuter

Abgabe: 8.1.2015, Besprechung: 15.1.-16.1.2015

`http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/theo2ws1415/`

–Anwesenheitsaufgaben–

A 10.1 Der Feldstärketensor

Im ersten Teil dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die zunächst rein formal eingeführten Vektoren $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ und $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ in der Tat physikalische Vierer-Vektoren darstellen, d. h. sich unter Wechsel des Inertialssystems mittel einer Lorentztransformation Λ (oder allgemeiner Poincaretransformation) transformieren wie die Koordinaten, $x \mapsto x' = \Lambda x$, also

$$j'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu(x)\,, A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\mu(x)\;.$$

(a) Argumentiere über die Kontinuitätsgleichung, dass j^μ ein kontravarianter Vierer-Vektor ist.

(b) Zeige in Lorenzeichung $\partial_\mu A^\mu = 0$, dass sich die Maxwellgleichungen als $\Box A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} j^\mu(x)$ schreiben lassen. Folgere daraus, dass A genau dann ein Vierervektor ist wenn j ein Vierervektor ist.

(c) Wieso gilt dann die Lorenzeichung in jedem Inertialsystem? Wie lauten die Maxwellgleichungen in einem anderen Inertialsystem?

Da nun die Potentiale zu einem Vierervektor in der speziellen Relativitätstheorie vereint wurden, gilt entsprechendes für die physikalischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Dies erfolgt durch Einführung des sogenannten Feldstärketensors F mit $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

(d) Zeige, dass aus der Wellengleichung für A^μ die inhomogenen Maxwellgleichungen folgen,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \frac{4\pi}{c} j^v(x)\,.$$

(e) Wie lautet die vier-dimensionale Formulierung einer Eichtransformation des Potentials A^μ? Wie transformiert sich F?

(f) Definiere den dualen Feldstärketensor $\hat{F}^{\mu\nu}$ als

$$\hat{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

mit dem total antisymmetrischen Pseudotensor

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1, & \text{falls } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ eine gerade Permutation on } (0,1,2,3) \text{ ist} \\ -1, & \text{falls } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ eine ungerade Permutation on } (0,1,2,3) \text{ ist} \\ 0, & \text{falls zwei oder mehr Indizes gleich sind} \end{cases}$$

Wie lauten die Komponenten von $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ und wie transformiert $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ unter Lorentztransformationen? Was ist das entsprechende Transformationsgesetz für $\hat{F}^{\mu\nu}$? Warum ist auch $\hat{F}$ eichinvariant?

(g) Zeige, dass die homogenen Maxwellgleichungen $\partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu}(x) = 0$ lauten. Schreibe diese Gleichungen so um, dass sie nur noch den Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ enthalten. Zeige, dass die Maxwellgleichungen tatsächlich lorentzinvariant sind. Was dürfte auf der rechten Seite außer Null sonst stehen?

(h) Schreibe den elektromagnetischen Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ als Matrix und drücke die Einträge durch die elektromagnetischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus:

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Welche Symmetrieeigenschaft hat dieser Tensor?

(i) Welche Transformation bildet F und $\hat{F}$ aufeinander ab?

(g) Wie transformiert sich $F^{\mu\nu}$ unter Lorentztransfomationen? Warum können daher weder $\vec{E}$ noch $\vec{B}$ Teil eines Vierervektors sein?

–Hausaufgaben–

Die Hausaufgaben auf diesem Zettel sind Zusatzaufgaben. Die erreichten Punkte zählen als Bonuspunkte.

H 10.1 Lichtblitze **(2+1+1+2+2+2=)10 Punkte**

Betrachte ein Koordinatensystem $\bar{S}$, das zum Zeitpunkt $t = 0$ deckungsgleich mit dem Inertialsystem S ist und sich diesem gegenüber mit der Geschwindigkeit v in positiver z-Richtung bewegt. Im System $\bar{S}$ wird zum Zeitpunkt $\bar{t}_{S1}$ an der Stelle $(\bar{x}_0, 0, 0)$ ein Lichtblitz ausgesandt. Vom selben Ort wird zum Zeitpunkt $\bar{t}_{S2}$ erneut ein Lichtblitz ausgesandt.

(a) Berechne die Koordinaten (x_{S1}, y_{S1}, z_{S1}) und die Zeit t_{S1} des Aussenden des ersten Lichtblitzes im System S.

(b) Was ist der Zeitpunkt t_{E1}, an welchem ein im Ursprung von S ruhender Beobachter den ersten Lichtblitz empfängt?

(c) Zu welcher Zeit t_{E2} nimmt derselbe Beobachter den zweiten Lichtblitz wahr?

(d) Wie sieht die Differenz $\delta t_E = t_{E2} - t_{E1}$ als Funktion der Größen $\bar{t}_{S1}$, $\bar{x}_0$, v und $\delta\bar{t}_S = \bar{t}_{S2} - \bar{t}_{S1}$ aus?

(e) Berechne das Verhältnis $\delta t_E/\delta\bar{t}_S$ für den Grenzfall sehr kurz hintereinander ausgesandter Lichtblitze ($\delta\bar{t}_S \to 0$).

(f) Bestimme die zeitliche Änderung des Abstandes zwischen Sender und Beobachter im Koordinatenursprung in S zum Zeitpunkt t_{S1}. Ersetze mit dem erhaltenen Ergebnis die Zeit $\bar{t}_{S1}$ im berechneten Grenzwert der vorherigen Teilaufgabe.

H 10.2 Boosts **(1+3+2+3+1=)10 Punkte**

(a) Zeige, dass eine spezielle Galileitransformation nicht den Raumzeit-Abstand erhält?

(b) Wie muss nun solch ein Boost modifiziert werden? Betrachte dazu einen Boost mit Geschwindigkeit $\beta = \frac{v}{c}$ in einer Koordinatenrichtung und nutze die Isometriebedingung $\Lambda^T g \Lambda = g$ der Erhaltung des Raumzeitabstands aus. Führe dabei den "Pseudowinkel" (*Rapidität*) $\theta = \text{arctanh}\beta = \text{arccosh}\gamma$ ein , wobei $\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2$.

(c) Zeige, dass ein Boost als eine Drehung um $i\theta$ interpretiert werden kann.

(d) Leite das Additionstheorem für zwei parallele Geschwindigkeiten her. Multipliziere dazu die Matrizen zweier paralleler Boosts.

(e) In welcher Größe ist die Hintereinanderausführung von Boosts additiv?

A 10.3 Der Energieimpulstensor **(3+3=)6 Punkte**

(a) In der Vorlesung wurde der *Energie-Impulstensor* wie folgt definiert:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}(F^{\mu\kappa}F^{\nu}_{\ \kappa} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}).$$

Welche Transformations- und Symmetrieeigenschaften hat $T^{\mu\nu}$? Berechne die Spur $T^{\mu}_{\ \mu}$. Zeige, dass $T^{00} = -\frac{1}{8\pi}(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2)$ und $T^{i0} = T^{0i} = -\frac{1}{c}(\vec{S})_i$, wobei $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B})$ der Poyntingvektor ist (siehe A6).

(b) Zeige, dass $\partial_\nu T^{\mu\nu} = f^\mu := \frac{1}{c}j_\nu F^{\mu\nu}$. Was liefert diese Gleichung für $\mu = 0$.

H 10.4 Nicht-abelsche Eichtheorien **(1+2+2+3+3+3=)14 Punkte**

Eichtheorien spielen eine große Rolle in der moderne Physik. Das einfachste Beispiel ist eine Eichtheorie mit Eichgruppe U(1) und führt zur bereits bekannten Elektrodynamik (das bedeutet, dass in der Eichtransformation $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu\alpha$ $\exp(iA^\mu), \exp(i\alpha) \in \mathrm{U}(1)$ sind). In dieser Aufgabe soll das nächsteinfachere Beispiel, eine SU(2)-Eichtheorie studiert werden. Diese Theorie beschreibt im Standardmodell der Elementarteilchenphysik die schwache Wechselwirkung.
Für eine SU(2)-Eichtheorie sind sowohl $\exp(i\alpha)$ sowie $\exp(iA^\mu)$ aus SU(2) (α und A^μ sind dann aus der zu SU(2) gehörenden Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$). Die Gruppe SU(2) ist die Gruppe der komplexen 2x2 Matrizen A mit $detA = 1$ und $A^\dagger A = 1$, $A^\dagger = (A^*)^T$.

(a) Zeige, dass die Gruppe SU(2) durch drei Variablen parametrisiert wird.

(b) Zeige, dass $t_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $t_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ und $t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mit $A = \exp(\frac{1}{2}i(a_1t_1 + a_2t_2 + a_3t_3))$ eine mögliche Basis für die Lie-Gruppe SU(2) bilden. Die t_i sind Elemente der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$.

(c) Wir definieren den Kommutator zweier Matrizen A und B als $[A, B] = AB - BA$ (Der Kommutator spielt in der Quantenmechanik eine wichtige Rolle, vergleichbar mit der Poissonklammer in der theoretischen Mechanik). Zeige für die Generatoren der $\mathfrak{su}(2)$ Lie-Algebra

$$[t_i, t_j] = 2i\epsilon_{ijk}t_k \ .$$

Dies bedeutet, dass die Elemente von $\mathfrak{su}(2)$ nicht vertauschen (deshalb nicht-abelsch). Die Nicht-Vertauschbarkeit ist der wesentliche Unterschied zur Elektrodynamik, der zu nichtlinearen Effekten führt.

(d) Im Fall der U(1) Eichtheorie wird die Wirkung mithilfe des Feldstärketensors $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ gebildet. Warum ist dies für eine SU(2) Eichtheorie keine gute Wahl? Zeige dazu, dass $F_{\mu\nu}$ für eine SU(2)-Eichtheorie nicht invariant unter der nichtabelschen Eichtransformation $A_\mu \to U A_\mu U^\dagger + \frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger$ mit $U = \exp\left(i \sum_j \alpha_j \frac{t_j}{2}\right)$ ist.
Tipp: Das Feld A_μ ist jetzt aus der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$, das heißt es lässt sich als Linearkombination der Generatoren von $\mathfrak{su}(2)$ ausdrücken: $A^\mu = \sum_{i=1}^3 A_i^\mu \frac{t_i}{2}$.[1] Was folgt aus $UU^\dagger = 1$ für $U \partial_\mu U^\dagger$?

(e) Nun definieren wir $G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$. Zeige damit, dass $\mathrm{Sp}\, G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$ eine eich- und lorentzinvariante Größe ist.
Tipp: Nutze, dass $Sp(AB) = Sp(BA)$.

(f) Nun verallgemeinern wir die Wirkung der Elektrodynamik zu $S = \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{Sp}\, G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$. Leite hieraus durch Variation der Wirkung die Bewegungsgleichungen für die Felder $A_\mu(x)$ her.

[1] Das bedeutet, dass A^μ ein Vierervektor mit Matrizen als Einträgen ist.