Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übungsblatt 11
8.1.2015
WS 14/15

Übungen zu Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm, Jonas Reuter

Abgabe: 15.1.2015, Besprechung: 22.1.-23.1.2015

`http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/theo2ws1415/`

–Anwesenheitsaufgaben–

A 11.1 Eigenschaften ebener elektromagnetischer Wellen

(a) Was ist der Unterschied zwischen ebenen Wellen und Kugelwellen?

(b) Warum bilden die Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$ und die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ein Dreibein?

(c) Wie hängen $\vec{B}$ und $\vec{E}$ zusammen? Wie ist ihre Phasenbeziehung?

(d) Was sind linear, zirkular und elliptisch polarisierte Wellen?

(e) Vergleiche die Mittelwerte der elektrischen und magnetischen Energiedichte.

(f) Gib den Poyntingvektor an. Welche Bedeutung haben Betrag und Richtung?

A 11.2 Elektische Dipolstrahlung

Betrachte eine periodische Ladungs- bzw. Stromdichte $\varrho(\vec{r},t) = \mathrm{Re}(\varrho(\vec{r})e^{-i\omega t})$ und $\vec{j}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}(\vec{j}(\vec{r})e^{-i\omega t})$, die auf einen endlichen Bereich $r < R_0$ begrenzt sind.

(a) Warum genügt es , das Vektorpotential $\vec{A}$ zu kennen? Zeige mit der Wellenzahl $k = \frac{\omega}{c}$, dass $\vec{A}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}(\vec{A}(\vec{r})e^{-i\omega t})$, wobei $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r'\vec{j}(\vec{r}')\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$.

(b) Zeige, dass im Fernfeld ($r >> R_0 > r'$) gilt: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr}\int d^3r'\vec{j}(\vec{r}')e^{-ik\vec{e}_r\cdot\vec{r}'}$.

(c) Zeige, dass in der *Langwellennäherung* $\lambda = \frac{2\pi}{k} >> R_0$ (was bedeutet das?) der führende Term (*elektrische Dipolstrahlung*,E1) lautet: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr}\int d^3r'\vec{j}(\vec{r}')$.

(d) Zeige mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung, dass $\vec{A}(\vec{r}) = -ik\frac{e^{ikr}}{r}\vec{p}$ mit dem Dipolmoment $\vec{p} = \int d^3r\varrho(\vec{r})\vec{r}$. Welche Art von Welle beschreibt $\vec{A}(\vec{r})$?

(e) Zeige mit der zusätzlichen Annahme $r >> \lambda$, dass $\vec{B}(\vec{r},t) = k^2\mathrm{Re}(\vec{e}_r \times \vec{p}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r})$ und $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r},t)\times\vec{e}_r$. Wie liegen die Felder relativ zur Wellenausbreitung?

–HAUSAUFGABEN–

H 11.1 Feldstärketensor einer elektromagnetischen Welle (2+3+3+2=)10 Punkte
Wir betrachten den Feldstärketensor einer linear polarisierten, monochromatischen elektromagnetischen Welle der Form

$$F(x)(a,b) := F_{\mu\nu}(x)a^\mu b^\nu = A(\langle k,a\rangle\langle n,b\rangle - \langle n,a\rangle\langle k,b\rangle)\sin(\langle k,x\rangle + \delta) \tag{1}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}^4$, wobei $\langle k, n\rangle = 0$. $A \in \mathbb{R}$ heißt die *Amplitude*, $k \in \mathbb{R}^4$ mit $\langle k,k\rangle = 0$ heißt der (lichtartige) *Wellenvektor*, $n \in \mathbb{R}^4$ mit $\langle n,n\rangle = -1$ heißt der (raumartige) *Polarisationsvektor*, und δ heißt die *Phase*. Hierbei ist $\langle a,b\rangle := g_{\mu\nu}a^\mu b^\nu$ das *Minkowski*-Skalarprodukt.

(a) Berechne die Tensorkomponenten $F_{\mu\nu}$ von Gleichung 1 in der Standardbasis.

(b) Zeige, dass F aus Gleichung 1 eine Lösung der *Maxwell*gleichungen in Vakuum (das heißt für die Ladungs-Stromdichte gilt $J(x) = 0$):

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = 0, \quad \partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu}(x) = 0 \ ,$$

darstellt.

(c) Zeige, dass für das elektrische Feld $\vec{E}$, dessen Komponenten durch

$$E^i(\vec{x},t) = F_{0i}(x), \quad (i = 1,2,3)$$

gegeben sind, und für das magnetische Feld $\vec{B}$, dessen Komponenten durch

$$B^k(\vec{x},t) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk}F_{ij}(x) \ , \quad (k = 1,2,3)$$

gegeben sind, gilt:

$$\vec{E} \perp \vec{k}, \quad \vec{B} \perp \vec{k}, \quad \vec{E} \perp \vec{B}, \quad |\vec{E}| = |\vec{B}| \ .$$

Hierbei ist $\vec{k}$ der Vektor mit den Komponenten $k^i, (i = 1,2,3)$.

Wir transformieren jetzt die elektromagnetische Welle aus Gleichung 1 mittels einer *Lorentz*-Transformation:

$$(\Lambda^* F)(x)(a,b) := F(\Lambda x)(\Lambda a, \Lambda b) \ .$$

(d) Zeige, dass $(\Lambda^* F)(x)$ wieder die Form aus Gleichung 1 besitzt, wobei der Wellenvektor durch $\Lambda^{-1}k$ und der Polarisationsvektor durch $\Lambda^{-1}n$ gegeben ist.