Physikalisches Institut | Übungsblatt 12
Universität Bonn | 15.1.2015
Theoretische Physik | WS 14/15

Übungen zu Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm, Jonas Reuter

Abgabe: 22.1.2015, Besprechung: 29.1.-30.1.2015

`http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/theo2ws1415/`

–Anwesenheitsaufgaben–

A 12.1 Magnetische Dipolstrahlung

(a) Zeige für den nächsten Entwicklungsterm in A 11.2c $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_{\text{E1}} - i\frac{k}{c}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\vec{j}(\vec{r}')(\vec{e}_r\cdot\vec{r}')$.

(b) Zeige $\vec{j}(\vec{e}_r\cdot\vec{r}') = \frac{1}{2}((\vec{e}_r\cdot\vec{r}')\vec{j} + (\vec{e}_r\cdot\vec{j})\vec{r}') + \frac{1}{2}(\vec{r}'\times\vec{j})\times\vec{e}_r$. Der letzte, in $\vec{j}$ und $\vec{r}'$ antisymmetrische Term liefert die *magnetische Dipolstrahlung* M1, die anderen beiden, als Summe symmetrischen, die *elektrische Quadrupolstrahlung* E2.

–Hausaufgaben–

H 12.1 Das Vektorpotential einer bewegten Punktladung - das Lienard-Wiechert Potential **(3+2+3+2=)10 Punkte**

Hier soll das Potential einer relativistischen Punktladung der Masse m und Ladung q bestimmt werden mittels der retardierten Greensfunktion der Elektrodynamik.
Wie in A 7.1 hergeleitet wurde lautet die retardierte Greensfunktion

$$G_{\text{ret}}(\vec{x},t) = \Theta(t)\frac{c}{4\pi r}\delta(r-ct)\,,$$

wobei $r = |\vec{x}|$. Die so definierte Funktion ist dabei als Operatorinverses zum D'Alembert-Operator $\Box$ definiert, d.h. als Lösung der Gleichung

$$\Box G(\vec{x},t) = \delta^{(3)}(\vec{x})\delta(t)\,.$$

(a) Zeige, dass eine spezielle Lösung der inhomogenen D'Alembert-Gleichung $\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c}j^\mu$ gegeben ist durch

$$A^\mu(\vec{x},t) = \int d^3y\frac{j^\mu(\vec{y},t-\frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\,.$$

Zeige ferner, dass diese Lösung der Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ genügt.

(b) Zeige, dass der Viererstrom j_μ im Wechselwirkungsterm $\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{4\pi}{c} A^\mu j_\mu$ für den Fall einer Punktladung im elektromagnetischen Feld gegeben ist als

$$j^\mu(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi} \int_{s_1}^{s_2} x'^\mu(s) \delta^{(4)}(x^\nu - x^\nu(s)) ds\,.$$

Benutze hierbei, dass der Wechselwirkungsterm für eine Punktladung gegeben ist als

$$S_{\text{int}} = -\frac{q}{c} \int_{s_1}^{s_2} A^\mu(x(s)) \frac{dx_\mu}{ds} ds$$

wie in H 9.1 diskutiert.

(c) Zeige, dass das von der Punktladung erzeugte Potential, das sogenannte *Lienard-Wiechert-Potential*, gegeben ist als

$$A^\mu(x) = \frac{q}{4\pi} \frac{x'^\mu(s_0)}{|\langle x'(s_0), x - x(s_0) \rangle|}\,,$$

wobei s_0 ein implizit über $x^0 - x^0(s_0) = |\vec{x} - \vec{x}(s_0)|$ definierter Parameterwert ist. Veranschauliche diese Bedingung graphisch im Minkowski-Diagramm. Benutze für die obige Rechnung, dass

$$\delta(|x-y|^2) = \frac{1}{2|\vec{x} - \vec{y}|} \left[\delta(x_0 - y_0 - |\vec{x} - \vec{y}|) + \delta(x_0 - y_0 + |\vec{x} - \vec{y}|)\right]\,,$$

sowie die Rechenregel für $\delta(f(x))$.

(d) Zeige, dass für den zugehöhrigen Feldstärketensor nur die implizite x-Abhängigkeit von s_0 relevant ist und somit gilt

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial s_0} \partial_\mu s_0(x) - \frac{\partial A_\mu}{\partial s_0} \partial_\nu s_0(x)\,.$$

Zeige weiter, dass dann gilt

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} = & \frac{q}{4\pi \langle x - x(s_0), x'(s_0) \rangle^2} \left[(x_\mu - x_\mu(s_0)) a_\nu(s_0) - (x_\nu - x_\nu(s_0)) a_\mu(s_0)\right] \\ & + \frac{q \langle x'(s_0), x'(s_0) \rangle}{4\pi \langle x - x(s_0), x'(s_0) \rangle^3} \left[(x_\mu - x_\mu(s_0)) x'_\nu(s_0) - (x_\nu - x_\nu(s_0)) x'_\mu(s_0)\right]\,, \end{aligned}$$

wobei gilt, dass

$$a_\mu(s_0) := x''_\mu - x'_\mu(s_0) \frac{\langle x - x(s_0), x''(s_0) \rangle}{\langle x - x(s_0), x'(s_0) \rangle}\,.$$