Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übungsblatt 13
22.1.2015
WS 14/15

Übungen zu Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm, Jonas Reuter

Abgabe: 29.1.2015, Besprechung: 5.2.-6.2.2015

`http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/theo2ws1415/`

–Anwesenheitsaufgaben–

A 13.1 Thomson Streuung

In dieser Aufgabe wollen wir den Wirkungsquerschnitt einer elastischen Streuung von Licht an einem Elektron oder Atom berechnen. Dazu nehmen wir an, dass das Elektron (mit Ladung $q = -e$ und Masse m_e) sich in einem harmonischen Oszillatorpotential mit Frequenz ω_0 und Dämpfung Γ bewegt (dieses Potential ist eine Näherung des Atompotentials). Ein externer Lichtstrahl mit den elektromagnetischen Feldern

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\,\vec{E}_0 \exp(i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t))$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\vec{k}}{|k|} \times \vec{E}$$

soll auf das Elektron treffen und es anregen.

(a) Argumentiere, dass die Bewegungsgleichung für ein nichtrelativistisches Elektron ($v \ll c$) folgendermaßen aussieht

$$m_e\ddot{\vec{r}}_0 + m_e\Gamma\dot{\vec{r}}_0 + m_e\omega_0^2\vec{r}_0 = -e\vec{E}_0 \exp(i(\vec{k}\cdot\vec{r}_0 - \omega t))$$

(b) Benutze die Näherung großer Wellenlängen $\lambda \gg |r_0(t)|$ um folgendes Resultat zu finden

$$m_e\ddot{\vec{r}}_0 + m_e\Gamma\dot{\vec{r}}_0 + m_e\omega_0^2\vec{r}_0 = -e\vec{E}_0 \exp(-i\omega t)$$

(c) Nutze den Ansatz $\vec{r}_0(t) = \vec{a}\exp(-i\omega t)$ für große Zeiten t um folgende Gleichung für das zeitabhängige Dipolmoment des Elektrons zu finden. Wieso ist der Ansatz gerechtfertigt?

$$\vec{p}(t) = \frac{e^2\vec{E}_0}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega)} \exp(-i\omega t)$$

(d) Berechne mit der Gleichung $\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{8\pi c^3}|\vec{p}|^2 \sin^2\vartheta$ (siehe Aufgabe H 13.1) die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel.

(e) Berechne den differentiellen Wirkungsquerschnitt. Dieser ist definiert als

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\text{gestreute Teilchen/Zeit/d}\Omega}{\text{einfallende Teilchen/Zeit/Flaeche}} = \frac{\text{abgestrahlte Leistung pro d}\Omega}{\text{einfallende Leistung pro Flaeche}}\,.$$

(f) Integriere den differentiellen Wirkungsquerschnitt um den totalen Wirkungsquerschnitt zu erhalten

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{m_2 c^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2} \; .$$

(g) Bilde den Grenzwert hoher Frequenzen um den Thomson-Wirkungsquerschnitt zu erhalten. Welches Problem tritt hierbei auf?

–HAUSAUFGABEN–

H 13.1 Dipolstrahlung **(6+4=)10 Punkte**

Betrachte eine lokalisierte, periodisch veränderliche Ladungs- und Stromverteilung $\varrho(\vec{r},t) = \mathrm{Re}(\varrho(\vec{r})e^{-i\omega t})$ bzw. $\vec{j}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}(\vec{j}e^{-i\omega t})$ mit dem magnetischen Moment $\vec{m} = \frac{1}{2c}\int d^3r(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r}))$ und dem Dipolmoment $\vec{p} = \int d^3r\,\varrho(\vec{r})\vec{r}$. Im Fernfeld und in Langwellennäherung ließ sich eine systematische Multipolentwicklung durchführen.

(a) Nach A 11.2 lautet der führende Term, die elektrische Dipolstrahlung (E1)

$$\vec{B}(\vec{r},t) = k^2\mathrm{Re}(\vec{e_r}\times\vec{p}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}) \; , \quad \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r},t)\times\vec{e}_r \; .$$

Sei $\vec{p} = |\vec{p}|\vec{e}_z$. Berechne $\vec{S}(\vec{r},t)$ und damit die gemittelte Strahlungsleistung in den Raumwinkel $d\Omega$ bzw. die gesamte Leistung: $\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{8\pi c^3}|\vec{p}|^2\sin^2\vartheta$ bzw. $P = \frac{\omega^4}{3c^3}|\vec{p}|^2$.
Tipp: Es gilt $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \langle|\vec{S}|\rangle r^2$. Begründe dies.

(b) Nach A 12.1 ist der nächste Term die magnetische Dipolstrahlung (M1), begleitet von der elektrischen Quadrupolstrahlung (E2). Es ist $\vec{E}_{M1} = -\vec{B}_{E1}$, $\vec{B}_{M1} = \vec{E}_{E1}$, mit der Ersetzung $\vec{p}\to\vec{m}$. Folgere $P = \frac{\omega^4}{3c^3}|\vec{m}|^2$ für die abgestrahlte Leistung.