Übungen zu Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm, Jonas Reuter

Abgabe: 23.10.2014, Besprechung: 30.10.-31.10.2014

`http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/theo2ws1415/`

–Anwesenheitsaufgaben–

A 2.1 Greensche Funktion der Laplacegleichung
Die Greensche Funktion $G(\vec{r})$ der Laplacegleichung für den Raum $\mathbb{R}^3$ ist diejenige Distribution, die $\Delta G(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$ erfüllt und im Unendlichen wie $\frac{1}{r}$ abfällt.

(a) Zeige: $G(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi r}$, d.h.

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}) \ .$$

Tipp: Benutze die Darstellung des Laplaceoperators in Kugelkoordinaten: $\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2}$ · Winkelableitungen.

(b) Folgere aus (a), dass das Faltungsintegral mit der Greenschen Funktion

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varrho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} d^3r'$$

die Poissongleichung $\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\varrho(\vec{r})$ löst. Inwieweit ist die Lösung eindeutig?

A 2.2 Punktladung vor einer Metallwand

Eine Möglichkeit der Lösung der Poissongleichung mit vorgegebenen Randbedingungen für ein Volumen V besteht darin, ausserhalb von V an von der Geometrie des Problems abhängenden Stellen fiktive (Spiegel-) Ladungen anzubringen, durch welche die geforderten Randbedingungen erzeugt werden. Betrachte dazu folgendes Beispiel:
Eine Punktladung Q sei am Orte $\vec{r}_Q = (0, 0, a)$ und eine unendlich große geerdete Metallplatte in der xy-Ebene, auf der das elektrostatische Potential $\Phi = 0$ sein soll.

(a) Zeige, dass folgendes Potential die Poissongleichung in dem Halbraum löst, in der sich die Ladung befindet, und für $\vec{r}$ auf der Platte die Randbedingung $\Phi = 0$ erfüllt:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} - \frac{Q}{|\vec{r} + \vec{r}_Q|} \ .$$

(b) Wie sieht das Potential im anderen Halbraum aus?

(c) Wie kann man das Zustandekommen des Potentials anschaulich interpretieren?

(d) Zeige, dass die Oberflächenladungsverteilung aufgrund von Influenz auf der Platte durch den Sprung des elektrischen Feldes gemäß $\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Phi}{\partial z}|_{z=0}$ gegeben ist.

(e) Skizziere die Feldlinien und $\sigma(x,y)$. Welche Symmetrie gibt es?

(f) Berechne die totale Influenzladung $Q_{inf} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(x,y)dxdy$.

(g) Welche Kraft wird auf Q ausgeübt? Was passiert für eine nicht geerdete Platte?

–Hausaufgaben–

H 2.1 Mehrdimensionale Deltadistribution in der Elektrodynamik (2+1+1+1+2=)7 Punkte

Definiere die drei-dimensionale Deltadistribution $\delta_{\vec{a}}$ als

$$\delta_{\vec{a}}[f] = \int_V f(\vec{r}')\delta(\vec{r}' - \vec{a})d^3r = \begin{cases} f(\vec{a}), & \vec{a} \in V \\ 0, & \text{sonst .} \end{cases}$$

(a) Stelle $\delta(\vec{r} - \vec{a})$ in kartesischen Koordinaten, Kugel- und Zylinderkoordinaten unter Ausnutzung entsprechender Symmetrien dar.

(b) Was ist die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ von N Punktladungen bei $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N$?

(c) Nutze die Deltadistribution in Kugelkoordinaten um die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ einer homogen geladenen Kugelschale vom Radius R mit Ladung Q anzugeben.

(d) Was ist $\rho(\vec{r})$ einer homogen geladenen Zylinderfläche vom Radius R.

(e) Bestimme die Ladungsverteilung eines homogen geladenen Diskus vom Radius R von zu vernachlässigender Dicke in Zylinder- wie auch in Kugelkoordinaten.

H 2.2 Greenscher Satz (2+1=)3 Punkte

Seien Φ und Ψ differenzierbare skalare Felder, V ein abgeschlossenes Volumen mit Oberfläche ∂V und $\partial_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \nabla$ die Richtungsableitung bzgl. der Oberflächennormale.

(a) Zeige mit dem Satz von Gauss die Greensche Identität:

$$\int_V (\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi + \Phi\Delta\Psi)d^3r = \int_{\partial V} \Phi\partial_{\vec{n}}\Psi d^2r \ .$$

(b) Beweise damit den Greenschen Satz

$$\int_V (\Phi\Delta\Psi - \Psi\Delta\Phi)d^3r = \int_{\partial V} (\Phi\partial_{\vec{n}}\Psi - \Psi\partial_{\vec{n}}\Phi)d^2r \ .$$