

---

## Übungen zu Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm, Jonas Reuter

Abgabe: 30.10.2014, Besprechung: 6.11.-7.11.2014

<http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/theo2ws1415/>

–ANWESENHEITSAUFGABEN–

### A 3.1 Orthonormale Polynome

Eine Taylorreihenentwicklung ist eine Entwicklung einer Funktion um den vollständigen Satz von Funktionen  $(x - a)^n$ . Allerdings haben wir es häufig mit Problemen mit periodischen Randbedingungen zu tun. Ein darauf angepasster Satz von Funktionen im Intervall  $[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]$  sind

$$u_0(x) = c_0$$

$$u_n(x) = c_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{d}x\right)$$

$$v_n(x) = c_2 \sin\left(\frac{2\pi n}{d}x\right).$$

Eine Entwicklung nach diesen Polynomen ist unter dem Begriff Fourierentwicklung bekannt.

- (a) Benutze die Orthonormalitätsbedingung  $\int_{-d/2}^{d/2} U_n(x)U_m^*(x)dx = \delta_{n,m}$  für obigen Funktionensatz um die Konstanten  $c_0$ ,  $c_1$  und  $c_2$  zu bestimmen.
- (b) Entwickle die Funktion  $g(x) = x$  nach obigem Funktionensatz und trage die ersten drei Partialsummen in ein Koordinatensystem ein.

–HAUSAUFGABEN–

### H 3.1 Koordinatensysteme

3 Punkte

In dieser Aufgabe wollen wir Differential- und Integralrechnung mit Hilfe der gängigen Koordinatensystemen studieren. Dies ist oftmals angebracht, wenn ein physikalisches System eine gewisse Symmetrie besitzt.

Der Transformationssatz der Integralrechnung besagt Folgendes: sei  $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^d$  ein Diffeomorphismus,  $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^d$  ein offenes Gebiet und  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann gilt

$$\int_{\phi(\mathcal{G})} f(y) d^d y = \int_{\mathcal{G}} f(\phi(x)) |\det D\phi(x)| d^d x.$$

Mit  $D\phi(x)$  bezeichnen wir die Jacobimatrix.

$$D\phi(x)^i_j = \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j}$$

- (a) Bestimme die Transformation des kartesischen Volumenelementes  $d^3x = dx dy dz$  im  $\mathbb{R}^3$  für Zylinderkoordinaten

$$(x, y, z)^T = (r \cos(\phi), r \sin(\phi), z)^T$$

und für Kugelkoordinaten

$$(x, y, z)^T = (r \sin(\theta) \cos(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\theta))^T.$$

Gib ferner an welche Werte  $(r, \theta, z)$  und  $(r, \theta, \phi)$  annehmen.

### H 3.2 Differentialoperatoren in unterschiedlichen Koordinatensystemen

3 Punkte

In dieser Aufgaben wollen wir studieren, wie sich die bekannten Differentialoperatoren unter Koordinatentransformation verhalten.

Der Nablaoperator  $\nabla$  ist in kartesischen Koordinaten  $x^i$  gegeben durch

$$\nabla = \vec{e}_i^x \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Dieser Ausdruck soll unabhängig von der gewählten Basis sein. Somit gilt in einem anderen Koordinatensystem  $y$ :

$$\nabla = \vec{e}_i^y f_i(y) \frac{\partial}{\partial y^i},$$

hierbei bezeichnen  $f_i(y)$  Funktionen, die durch den Koordinatenwechsel von  $x$  nach  $y$  entstehen und  $\vec{e}_i^y$  bezeichnen die Basisvektoren in den Koordinaten  $y^1$ .

Berechnen wir nun den Gradient einer Funktion  $F(y(x))$  in den Koordinaten  $y^2$ , so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \nabla F(y(x)) &= \vec{e}_i^x \partial_i^x F(y(x)) \\ &= \vec{e}_i^x \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \partial_j^y F(y(x)) \\ &\equiv \vec{e}_i^y f_i(y) \partial_i^y F(y) \end{aligned} \quad (1)$$

Hierbei ist  $\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$  die Komponenten der Jacobimatrix  $D_x y(x)$ . Somit lassen sich aus Gleichung (1) die Funktionen  $f_i$  ablesen. Um nun die Jacobimatrix  $D_x y$  auszurechnen benutzt man:

$$D_x y = (D_y x)^{-1}$$

(a) Berechne folgende Operatoren in Zylinder- und Kugelkoordinaten:

- grad
- div

### H 3.3 Die Kapazität

(1+2+1=)4 Punkte

Ein Volumen  $V$  wird von einer Fläche  $S$  begrenzt, die aus mehreren, auf den Potentialen  $\Phi_i$  gehaltenen, separaten leitenden Teilflächen  $S_i$  besteht, von denen sich evtl. eine im Unendlichen befindet. Die Kapazitäten  $C_{ij}$  sind über  $Q_i = \sum_j C_{ij} \Phi_j$  definiert, wobei  $Q_i$  die gesamte auf der Fläche  $S_i$  befindliche Ladung bezeichnet.

(a) Zeige  $C_{11} = \frac{1}{4\pi} \int_V |\nabla \Phi|^2 d^3 r$ , wobei  $\Phi$  die Lösung der Poissongleichung in  $V$  zu den gegebenen Randwerten ist. Berechne so die Kapazität einer Kugel.

*Tipp:* Betrachte den Fall einer Teilfläche mit  $\Phi_1 = 1$  und benutze den Greenschen Satz.

(b) Beweise den Satz “ $\Delta \Phi = 0 \Leftrightarrow \int_V |\nabla \Phi|^2 d^3 r = \min!$ ” und folgere, dass die Kapazität durch  $C_{11}[\Psi] = \frac{1}{4\pi} \int_V |\nabla \Psi|^2 d^3 r$  nach oben beschränkt wird. Dabei ist  $\Psi$  eine beliebige Funktion, die den Randbedingungen genügt. So findet man obere Schranken für die Kapazität, ohne das elektrostatische Problem lösen zu müssen.

(c) Zeige  $W = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij} \Phi_i \Phi_j$ . Bestätige dies für einen Plattenkondensator explizit.

---

<sup>1</sup>Die Basisvektoren für ein Koordinatensystem können über  $\hat{e}_{y_i} = \frac{\frac{\partial \vec{r}_x}{\partial y_i}}{\left| \frac{\partial \vec{r}_x}{\partial y_i} \right|}$  berechnet werden.

<sup>2</sup>Beachte, dass die neuen Koordinaten  $y$  als Funktion der alten Koordinaten  $x$  aufgefasst werden können