Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übungsblatt 4
30.10.2014
WS 14/15

Übungen zu Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm, Jonas Reuter

Abgabe: 6.11.2014, Besprechung: 13.11.-14.11.2014

`http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/theo2ws1415/`

–Anwesenheitsaufgaben–

A 4.1 Elektrische Feldenergie

(a) Zeige, dass die Energie des elektrischen Feldes einer Ladungsverteilung ϱ lautet

$$W = \frac{1}{2}\int\int \frac{\varrho(\vec{r})\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r d^3r' = \frac{1}{2}\int \varrho(\vec{r})\Phi(\vec{r}) d^3r = \frac{1}{8\pi}\int |\vec{E}(\vec{r})|^2 d^3r \, .$$

(b) Diskutiere den Fall, dass ϱ aus zwei Ladungswolken besteht, von denen die eine positive und die andere negative Gesamtladung trägt. Welches Problem tritt auf?

A 4.2 Azimutalsymmetrie der Ladungsverteilungen

Bei einer um die z-Achse rotationssymmetrischen Ladungsverteilung kann das Potential wie folgt nach Legendre-Polynomen entwickelt werden

$$\Phi(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(cos\vartheta).$$

(a) Begründe diesen Ansatz und insbesondere die Exponenten l und $-(l+1)$ von r.

(b) Zeige: ist das Potential bei einem um die z-Achse rotationssymmetrischen Problem auf der z-Achse bekannt ($\Phi(r=z) = \Phi(r,0)$), so ist auch $\Phi(r,\vartheta)$ bekannt.

(c) In der xy-Ebene befindet sich ein Ring mit Radius R und Mittelpunkt auf der z-Achse, der eine Ladung Q trägt. Bestimmt zuerst $\Phi(r=z)$ und dann $\Phi(r,\vartheta)$.

–Hausaufgaben–

H 4.1 Laplace-Operator und Rotation — 2 Punkte

Verwende die Darstellung des Nabla-Operators ∇ in Kugel- und Zylinderkoordinaten aus Aufgabe H3.2 um den Laplace-Operator $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ in diesen Koordinaten auszurechnen. Achte hierbei darauf, dass die Basisvektoren e_r, e_ϕ, e_θ als auch e_r, e_ϕ, e_z von den Koordinaten nicht-trivial abhängen und daher die Komponenten von ∇ auch auf diese wirken.

H 4.2 Legendre-Polynome — (1+1+2+1+1=)6 Punkte

Setzt man für die Lösung der Laplacegleichung $\Delta\Phi = 0$ in Kugelkoordinaten den sogenannten Sepratationsansatz an als

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi) \, ,$$

so läßt sich die partielle Differentialgleichung zweiter Ordung $\Delta\Phi = 0$ reduzieren auf drei gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung für U, P und Q.

(a) Zeige, dass die Funktionen Q, P und U folgende Gleichungen erfüllen

$$Q''(\varphi) = -m^2 Q(\varphi)\,, \qquad U''(r) = \tfrac{l(l+1)}{r^2} U(r)\,,$$
$$\tfrac{d}{dx}\left((1-x^2)\tfrac{d}{dx}P(x)\right) + \left(l(l+1) - \tfrac{m^2}{1-x^2}\right) P(x) = 0\,, \qquad (\star)$$

wobei $x = \cos(\theta)$ gesetzt wurde und die Konstanten $m, l \in \mathbb{R}$. Die Differentialgleichung für P wird auch *verallgemeinerte Legendregleichung* genannt.

(b) Warum gilt $m \in \mathbb{Z}$? Wieso beschreibt $m = 0$ ein zylindersymmetrisches Problem, d.h. ein Problem mit Azimutalsymmetrie? Schreibe $(\star)$ dafür als *Legendregleichung*

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}P_l(x)\right) + l(l+1)P_l(x) = 0\,.$$

Da diese Gleichung zweiter Ordnung ist, gibt es für jedes l zwei linear unabhängige, i.a. für $x \to \pm 1$ divergente Lösungen $P_l(x)$ und $\tilde{P}_l(x)$. $P_l(\pm 1)$ bleibt allerdings für $l \in \mathbb{N}$ endlich, da P_l dann einfache Polynome vom Grad l sind. Diese durch $P_l(1) = 1$ normierte polynomiale Lösung heisst *l-tes Legendre-Polynome $P_l(x)$*.

(c) Benutze die Formel von Rodrigues (Olinde Rodrigues, 1794-1851)

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l\,,$$

um die Orthogonalität der Polynome in $L^2([-1,1])$ zu zeigen:

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}\,.$$

Tipp: Benutze zuerst die Legendregleichung um die Orthogonalität zu zeigen und anschließend die Formel von Rodrigues um die Normalisierung auszurechnen. Außerdem gilt: $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^l \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}l!}{\Gamma(l+3/2)}$, wobei $\Gamma(l+1) = l\Gamma(l)$ mit $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ die Gammafunktion ist.

(d) Gib $P_l, l \leq 2$ explizit an. Wie wirkt allgemein die Parität, d.h. was ist $P_l(-x)$?

(e) Folgere aus der Formel von Rodrigues die Identität

$$P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) = (2l+1)P_l(x)\,.$$

H 4.3 Vollständigkeit der Legendre-Polynome **2 Punkte**

Die $P_l(x)$ bilden sogar ein vollständiges System (Hilbertbasis) in $L^2([-1,1])$, denn die $P_l, l \leq n$ entstehen durch Orthogonalisierung aus $x^l, l \leq n$. Vollziehe dies durch Anwenden des Gram/Schmidt-Verfahrens auf $\{1, x, x^2\}$ nach und vergleiche das Ergebnis mit den normierten Legendre-Polynomen. Zur Erinnerung: Mit der Vorschrift

$$\vec{v}_i = \frac{1}{||\cdot||}(\vec{w}_i - \sum_{j=1}^{i-1}(\vec{w}_i\cdot\vec{v}_j)\vec{v}_j)$$

wird aus linear unabhängigen Vektoren $\{\vec{w}_i\}$ ein Orthonormalsystem $\{\vec{v}_i\}$ erzeugt.