Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übungsblatt 5
6.11.2014
WS 14/15

Übungen zu Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm, Jonas Reuter

Abgabe: 13.11.2014, Besprechung: 20.11.-21.11.2014

http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/theo2ws1415/

–ANWESENHEITSAUFGABEN–

A 5.1 Ladungsanordnungen ohne Axialsymmetrie

(a) Zeige mit Hilfe des *Additionstheorems*

$$P_l(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)$$

(α ist der Winkel zwischen den Einheitsvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}'_r$, d. h. es gilt $\cos(\alpha) = \cos(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta)\sin(\theta')\cos(\phi - \phi')$), dass das durch eine beliebige Ladungsverteilung ρ am Ort $\vec{x}$ erzeugte Potential gegeben ist durch:

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi)\int_0^{\infty} r'^2 dr' \frac{r^l_<}{r^{l+1}_>}\int\int d\Omega' Y^*_{lm}(\theta',\phi')\rho(\vec{x}')$$

mit $r_< = \min(|r|,|r'|)$ und $r_> = \max(|r|,|r'|)$.
Tipp: $\frac{1}{|r-r'|} = \sum \frac{r^l_<}{r^{l+1}_>} P_l(\cos\alpha)$.

(b) Folgere daraus, dass für das Fernfeld einer Ladungsverteilung (d.h. wenn $r > r'$ bleibt) sich das Potential als

$$\Phi(\vec{x})|_{\text{aussen}} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi)\frac{Q_{lm}}{r^{l+1}}$$

schreiben lässt, wobei die $Q_{lm} = \int_0^r r'^2 dr' r'^l \int\int d\Omega' Y^*_{lm}(\theta',\phi')\rho(\vec{r}')$ als Multipolmomente bezeichnet werden.

A 5.2 Drehimpuls und Kugelflächenfunktionen

(a) Die Drehimpulse L_i sollen per Poissonklammer $\{L_i, f(\vec{x})\}$ auf Funktionen wirken. Zeige, dass $\{L_i, f(\vec{x})\} = (\vec{x}\wedge\nabla)_i f(\vec{x})$ und berechne $\vec{L}$ sowie $\vec{x}\wedge\nabla$ in Kugelkoordinaten. Zeige damit, dass Y_{lm} Eigenfunktion von L_z mit Eigenwert im ist:

$$\{L_z, Y_{lm}\} = imY_{lm}\ .$$

Tipp: Nutze die Definition der Y_{lm} aus H 5.1d.

(b) Zeige: $(\vec{r} \wedge \nabla)^2$ ist der Winkelanteil des Laplaceoperators, multipliziert mit r^2, d.h.

$$(\vec{r} \wedge \nabla)^2 = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \ .$$

(c) Folgere aus dem Separationsansatz $\Phi(\vec{x}) \sim \frac{U(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi)$ aus H 4.2, dass Y_{lm} Eigenfunktionen von "L^2" mit Eigenwert $-l(l+1)$ ist, genauer:

$$\sum_{i=1}^{3} \{L_i, \{L_i, Y_{lm}\}\} = -l(l+1) Y_{lm} \ .$$

–Hausaufgaben–

H 5.1 Definition und Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen (1+1+1+1+1+1=)6 Punkte

(a) Zeige, dass die Funktion $P(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} H(x)$ die verallgemeinerte Legendregleichung ((*) in H 4.2.a) erfüllt, wenn die Funktion $H(x)$ folgende Differentialgleichung löst:

$$(1-x^2) H''(x) - 2x(m+1) H'(x) + (l(l+1) - m(m+1)) H(x) = 0 \ .$$

Die beiden linear unabhängigen Lösungen der verallgemeinerten Legendregleichung sind i.a. für $x \to \pm 1$ divergent, und nur für $l \in \mathbb{N}$ und $|m| \leq l (m \in \mathbb{Z})$ bleibt eine davon endlich. Diese Lösung heisst *assoziierte Legendrefunktion* $P_l^m(x)$.

(b) Zeige mit (a), dass die verallgemeinerte Legendregleichung gelöst wird durch

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \ .$$

Tipp: Zeige dazu eine Differentialgleichung für $H'(x)$.

(c) Wie verändert $m \to -m$ die verallgemeinerte Legendregleichung? Definiere daher

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \ .$$

(d) Damit definiert man die Kugelflächenfunktionen als

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \ .$$

Gib $Y_{lm}, l \leq 2$, explizit an. Zeige für die Konjugation: $Y_{lm}^* = (-1)^m Y_{l,-m}$.

(e) Zeige das Verhalten unter der Parität:

$$Y_{lm}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \phi), \quad \text{d.h.} \quad Y_{lm}(-\vec{e}_r) = (-1)^l Y_{lm}(\vec{e}_r) \ .$$

(f) Zeige, dass die allgemeine Lösung von $\Delta f = 0$ in Kugelkoordinaten lautet:

$$f(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1}) Y_{lm}(\theta,\phi) \ .$$

Tipp: vgl. A 4.2.

H 5.2 Technisches zu den Kugelflächenfunktionen **(1+1+1+1=)4 Punkte**

(a) Beweise folgende geschlossene Formel für die assoziierten Legendrefunktionen:

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \ .$$

(b) Zeige die Orthogonalität der assoziierten Legendrefunktionen bzgl. l:

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \ .$$

(c) Zeige, dass die Y_{lm} ein Orthonormalsystem von $L^2(S^2)$ bilden:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y_{l'm'}^*(\theta,\phi) Y_{lm}(\theta,\phi) \sin\theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \ .$$

(d) Die $Y_{lm}(\theta,\phi)$ sind sogar vollständig in $L^2(S^2)$, denn die $Y_{lm}, l \leq n$ mit $n \in \mathbb{N}$ beliebig, entstehen durch Orthogonalisierung aus den linear unabhängigen homogenen Polynomen $\hat{x}^a \hat{y}^b \hat{z}^c, a+b+c \leq n$, $(\hat{x}_i = \frac{x_i}{r})$. Rechne dies durch Anwenden des Gram/Schmidt-Verfahrens auf $\{1, \hat{x} \pm i\hat{y}, \hat{z}, \hat{z}^2, (\hat{x} \pm i\hat{y})\hat{z}, (\hat{x} \pm i\hat{y})^2\}$ nach. Warum sind es nur fünf Polynome zweiten Grades und nicht wie erwartet $(\hat{x}^2, \hat{y}^2, \hat{z}^2, \hat{x}\hat{y}, \hat{x}\hat{z}, \hat{y}\hat{z})$ sechs?